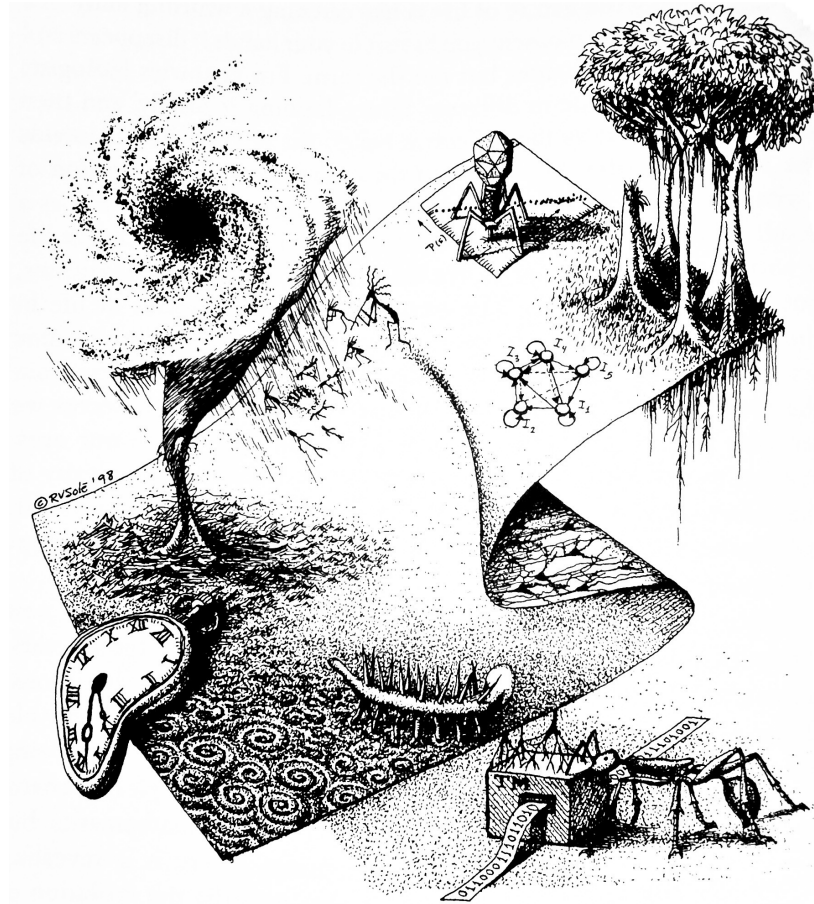


”L’entrellat del món”

Un camí cap a la complexitat



Alumne: Bernat Espigulé Pons

Universitat Autònoma de Barcelona

Departament de Física

Tutor: Dr. Gaspar Orriols Tubella

Treball de Grau de Física

Curs 2011/12, Setembre

Resum

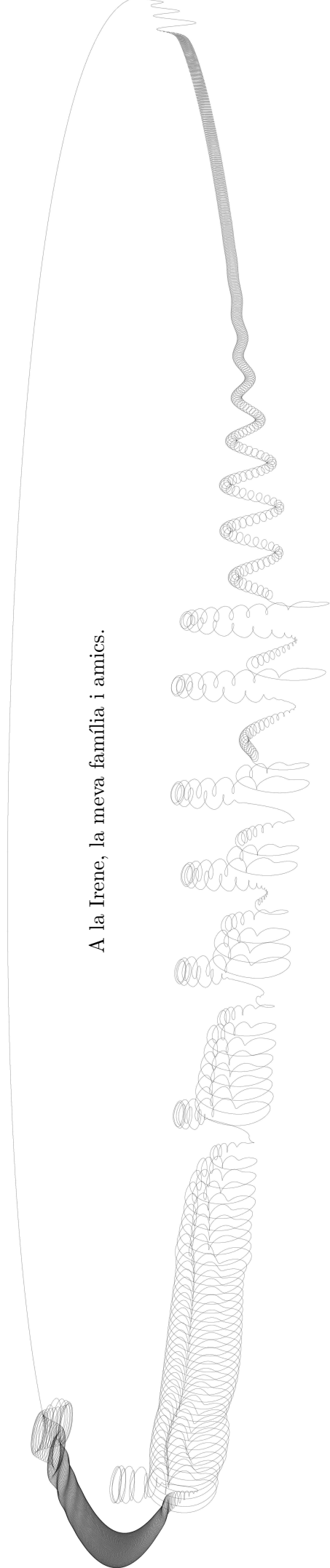
Aquest treball introdueix i aporta noves visualitzacions numèriques a la teoria desenvolupada per *G. Orriols et al*, la qual va venir motivada per l'observació de comportaments oscil·latoris complexos en una família de dispositius físics i en els seus models matemàtics associats, per els quals no hi ha cap explicació coneguda dins de la corrent principal de la dinàmica no lineal.

Primer es donarà una breu introducció històrica al problema, tot seguit s'introduiran alguns conceptes bàsics de la teoria dels sistemes dinàmics, i finalment es consideraran les possibilitats oscil·latòries dels sistemes dinàmics.

En concret, es descriuran dos mecanismes bàsics de barreja no lineal d'oscil·lacions i, a través de la seva generalització a camps vectorials no lineals més rics, s'establirà un escenari dinàmic genèric amb possibilitats oscil·latòries extraordinàries.

Per últim, la turbulència, com a possible destinació d'aquest camí, serà discutida i emmarcada dins de la teoria dels sistemes dinàmics.

A la Irene, la meva família i amics.



Agraïments

Voldria agrair especialment al meu tutor del treball de grau, Dr. Gaspar Orriols Tubella, per tot l'entusiasme que m'ha encomanat des del primer dia que vaig trepitjar aquesta Universitat. Les seves classes d'*Iniciació a la física* eren un autèntic espectacle cinestètic només comparable als *Feynman lectures on physics*. Agraeixo molt la crítica constructiva que vaig rebre a la presentació oral *Caos determinista* que vaig realitzar per aquella mateixa assignatura. Precisament va ser allà quan vaig començar a entrar en contacte amb els treballs del seu grup sobre oscil·lacions complexes (1)(2)(3). Més tard, tot buscant articles a l'arXive.org per un treball de l'assignatura de biofísica amb els professors David Jou i Juan Camacho, vaig topar-me amb l'article acabat de penjar *About the oscillatory possibilities of the dynamical systems* de R. Herrero, F. Pi, J. Rius, G. Orriols (4). Sorprès pel que hi vaig llegir, em vaig posar en contacte amb el professor Gaspar Orriols, el qual em va rebre cordialment al seu despatx per explicar-me de primera mà aquest ambiciós treball. Més endavant, un cop acabat l'intercanvi acadèmic amb la Universitat de Califòrnia, Santa Barbara, vàrem acordar la realització del present treball de grau. Li agraeixo molt el suport constant, la bibliografia recomanada i el material proporcionat; així com les múltiples converses i seminaris que hem mantingut al llarg d'aquest curs malgrat l'inconvenient d'haver realitzat una estada ERASMUS a la Universitat de Heidelberg.

Agraeixo l'ajuda del meu germà bessó, Jofre Espigulé, pel que fa a l'elaboració de la plantilla L^AT_EX d'aquest treball, i sobretot per no parar de retroalimentar aquesta curiositat mútua sobre la natura que des de ben petits vàrem començar a experimentar.

També dono les gràcies al professor Marià Baig per fer-me arribar els seus apunts sobre equacions diferencials per a físics i per donar-me ànims amb la realització del treball.

Índex

Índex de figures	v
1 Introducció	1
2 Sistemes Dinàmics	7
2.1 Sistemes autònoms i no autònoms	11
2.2 Sistemes discrets	12
2.3 Conjunts límits	13
2.4 Oscil·ladors	14
2.4.1 El pèndol simple	15
2.4.2 El pèndol esmorteït. Equació de Duffing's	18
2.4.3 Oscil·ladors passius modulats	19
2.4.4 L'oscil·lador de van der Pol	20
2.4.5 Equació de Van der Pol amb modulació externa.	21
2.5 Sistemes conservatius i sistemes dissipatius	21
2.6 Dispositius BOITAL	23
2.7 Bifurcació de Hopf	29
2.8 Bifurcació Homoclínica	31
2.9 Tipus de bifurcacions	33
2.9.1 Bifurcacions Locals	33
2.9.2 Bifurcacions Globals	34
3 Escenari de Landau Generalitzat	37
3.1 Barreja no lineal de modes d'oscil·lació	42
3.2 Sistemes N-dimensionals amb un camp vectorial no lineal	48
3.2.1 Escenari de Landau generalitzat	49

ÍNDIX

3.2.2	Sistemes N-dimensionals amb un camp vectorial no lineal unidireccional	51
3.3	La Turbulència dins dels sistemes dinàmics	54
4	Conclusions	59
	Bibliografia	61

Índex de figures

1.1	Sistemes Dinàmics	1
2.1	El rellotge de pèndol	10
2.2	Retrat de l'espai de fases d'un pèndol simple	17
2.3	Punts fixos	23
2.4	Esquema d'un dispositiu BOITAL	24
2.5	Funció interferomètrica BOITAL	25
2.6	Solució estacionària BOITAL	27
2.7	Bifurcació de Hopf	30
2.8	Bifurcació homoclínica	32
2.9	Resum dels oscil·ladors dinàmics coneguts	36
3.1	Generació de tors invariant provocats per una bifurcació de Hopf	39
3.2	Respostes d'un dispositiu BOITAL quatricapa	40
3.3	Resposta complexa d'un dispositiu BOITAL de dimensió sis	41
3.4	Mecanisme de barreja no lineal d'oscil·lacions 1	43
3.5	Mecanisme de barreja no lineal d'oscil·lacions 2	44
3.6	Barreja de quatre modes d'oscil·lació per un sistema dinàmic de dimensió 5	47
3.7	Matrius de punts fixos amb subespais lineals m -dimensionals	49
3.8	Barreja no lineal de modes d'oscil·lació	50
3.9	Evolucions temporals numèriques amb 7 modes d'oscil·lació per $N = 8$	52
3.10	Evolució temporal de vuit variables en la forma canònica	53
3.11	Punt fix i òrbita periòdica d'un fluid en moviment	55
3.12	Dibuix de Leonardo d'un flux turbulent	56
3.13	Retrat de l'espai de fases del flux turbulent del pla de Couette	57

ÍNDICE DE FIGURES

1

Introducció

En aquest treball ens situarem a l'horitzó conceptual de la dinàmica. En concret, entreveurem *l'entrellat del món* subjacent a la dinàmica matemàtica, disciplina que unifica les ciències sota un marc geomètric comú.

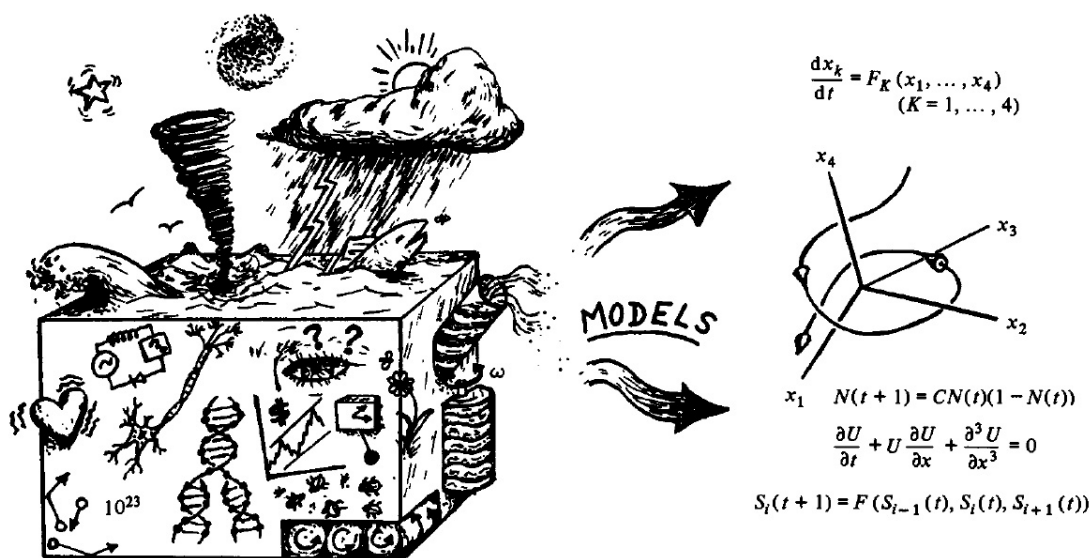


Figura 1.1: Sistemes Dinàmics - Dinàmica del món real (esquerra) i els models dinàmics de *l'entrellat del món* (dreta). Dibuix de E. Atlee Jackson (5) 1989.

Qualsevol cosa que se'ns pugui acudir pot ser considerada com un sistema dinàmic. N'hi ha prou que tingui estructura interna, amb graus de llibertat que li permetin transformar-se i que aquests graus de llibertat s'influeixin entre ells mentre evolucio- nen. Són necessàries, però, algunes condicions si volem que el sistema faci coses in-

1. INTRODUCCIÓ

teressants. D'una banda, fa falta que les influències entre graus de llibertat es tanquin formant bucles de realimentació. D'altra banda, és necessari que entre les influències hi hagi dependències no lineals. En aquest sentit, és necessari que les interdependències introdueixin efectes de competència per tal que en resultin fenòmens interessants. La naturalesa d'un sistema dinàmic ve determinada per la dels mecanismes d'interacció entre els seus graus de llibertat. Podem imaginar sistemes estrictament físics o químics, que poden ser relativament senzills, però també n'hi ha de molt complicats com el de l'atmosfera i els seus fenòmens meteorològics. També tenim sistemes biològics o psicològics dins d'un individu, o sistemes ecològics, econòmics i socials en col·lectius d'individus. Els sistemes dinàmics més ben estudiats són de naturalesa matemàtica i consisteixen en equacions que descriuen l'evolució de variables matemàtiques acoblades entre si per operacions matemàtiques. La resta de sistemes, que pertanyen al món real, s'han d'estudiar experimentalment, observant-ne l'evolució i possible transformació. També podem intentar construir un model matemàtic que es comporti de forma semblant al sistema real, fig.1.1. Però això normalment no és trivial, ni tan sols suposant que es disposi d'una teoria per descriure els mecanismes involucrats, com serà normalment el cas en la majoria de sistemes físics.

La dinàmica es remunta als treballs de Galileu¹, i sovint se l'identifica com a branca de la filosofia natural. La dinàmica matemàtica va començar a mitjans del segle XVII, quan Newton va introduir les equacions diferencials amb les quals va descobrir les lleis del moviment i la gravitació universal, i les va combinar per explicar les lleis de Kepler. Concretament, Newton va solucionar el problema dels dos cossos. Generacions posteriors de físics i matemàtics van provar de generalitzar els mètodes analítics de Newton al problema dels tres cossos (e.g., el Sol, la Terra i la Lluna) però curiosament aquest problema va resultar molt més difícil de resoldre. Després de dècades d'esforços, es va veure que el problema dels tres cossos era essencialment impossible de resoldre de forma explícita. Arribat a aquest punt semblava que ja no hi havia res a fer.

La sorpresa va venir amb el treball de Poincaré a finals del segle XIX. Ell va introduir un nou punt de vista que posava èmfasi a qüestions més qualitatives i no tan

¹Recentment s'ha reconegut a Leonardo da Vinci, vegeu el llibre (6), com un dels grans precursor de l'actual dinàmica de sistemes. Leonardo va desenvolupar poderoses eines geomètriques de caire topològic per estudiar i relacionar tot tipus de fenòmens dinàmics. Arquímedes, és l'altre gran precursor que tampoc va deixar escola.

quantitatives. Poincaré va desenvolupar un poderós enfocament geomètric per analitzar aquest tipus de qüestions. Aquest mètode s'ha incorporat al camp de la dinàmica moderna, amb aplicacions que van molt més enllà de la mecànica celesta. Poincaré va ser la primera persona d'entreveure l'existència del caos en el qual un sistema determinista exhibeix un comportament aperiòdic que és extremadament sensible a les condicions inicials, i per tant n'impossibilita la predicció a llarg termini.

Però el caos determinista va romandre amagat durant la primera meitat del segle XX; en canvi la dinàmica es va centrar principalment en els oscil·ladors no lineals i les seves aplicacions a la física i l'enginyeria. Els oscil·ladors no lineals van jugar un paper vital en el desenvolupament de tecnologies com la radio, el radar, i els làsers. Pel que fa a la vessant teòrica, els oscil·ladors no lineals també van estimular la creació de noves tècniques matemàtiques - els pioners que figuren en aquest camp són van der Pol, Andronov, Littlewood, Cartwright, Levinson, i Smale. Mentrestant, en un desenvolupament per separat, els mètodes geomètrics de Poincaré varen ser ressuscitats per proporcionar una comprensió més profunda de la mecànica clàssica, gràcies als treballs de Birkhoff i més tard Kolmogorov, Arnol'd, i Moser.

La invenció de l'ordinador a la dècada dels cinquanta va canviar per complet el curs de la història de la dinàmica. Els ordinadors van permetre l'experimentació directa amb les equacions, i van ajudar a desenvolupar intuïcions sobre els sistemes no lineals sense precedents. Aquests experiments van donar lloc al descobriment del caos determinista i els atractors estranys per part del meteoròleg Edward Lorenz el 1963.

El treball de Lorenz no va rebre gaire atenció fins que a la dècada dels 70 va esclatar el boom pel caos¹ dins de la comunitat científica. A continuació citem alguns dels principals desenvolupaments d'aquella dècada. El 1971 Ruelle i Takens van proposar una nova teoria per la transició cap a la turbulència en fluids, basada en consideracions abstractes sobre atractors estranys que va permetre descartar la ruta quasiperiòdica de Landau (1944) i Hopf (1948). Uns anys més tard, May va trobar exemples de caos en mapes iterats provinents de la dinàmica de poblacions. Tot seguit de la mà del físic Feigenbaum va venir el descobriment més sorprenent del caos. Feigenbaum va descobrir que hi ha certes lleis universals governant la transició del comportament regular al caòtic; dit d'una manera informal, sistemes dinàmics completament diferents

¹Per una introducció històrica més detallada vegeu els llibres (7), (8) i (9).

1. INTRODUCCIÓ

d'entrada esdevenen caòtics de la mateixa manera¹. El seu treball va establir un vincle entre el caos i les transicions de fase, i va incitar tota una generació de físics a l'estudi de la dinàmica. Finalment, experimentals com Gollub, Libchaber, Swinney, Lindsay, Moon, i Westevelt van posar a prova les noves idees sobre el caos en experiments amb fluids, reaccions químiques, circuits electrònics, oscil·ladors mecànics, i semiconductors.

Encara que el caos va rebre el centre d'atenció, hi van haver dos altres desenvolupaments importants en dinàmica als anys setanta. Mandelbrot va agrupar i popularitzar els fractals mostrant com podien ser aplicats a una extensa varietat de temes. I en l'àrea emergent de la biologia de sistemes, Winfree (12) va aplicar els mètodes geomètrics de la dinàmica a les oscil·lacions biològiques, en especial, ritmes circardians (24h aprox.) i ritmes cardíacs.

A la dècada dels 80 i 90 hi va haver molta més gent treballant en dinàmica que van aportar nombroses contribucions, principalment relacionades amb el caos, que ens limitarem a comentar. Ara bé, tot i que el caos va encapçalar el protagonisme de la dinàmica moderna, i ha estat sovint invocat per donar cabuda a tota mena de comportaments complexos com la turbulència, a dia d'avui encara no es disposa d'un conjunt de teoria acceptada dins de la dinàmica no lineal que permeti explicar la ubiqüitat de fenòmens oscil·latoris complexos a la natura.

Davant d'aquestes limitacions, ens veiem obligats a emprendre un nou camí que ens portarà fins als últims avenços en l'estudi de les oscil·lacions complexes liderats per la recerca encetada a la Universitat Autònoma de Barcelona i realitzada durant els últims vint anys (13)(14)(15)(16)(17)(18)(19)(3)(20). El tret de sortida es situa en la invenció d'una família de dispositius termoòptics anomenats BOITAL (vegeu la secció 2.6). L'estudi de la família BOITAL, juntament amb els models matemàtics relacionats, ha permès descobrir un terreny dinàmic especialment fèrtil, amb possibilitats oscil·latòries i evolutives sense precedents. En concret, s'han observat com certs sistemes dinàmics N-dimensionals poden exhibir comportaments complexos amb un alt nombre de modes d'oscil·lació involucrats i sense la necessitat de presentar caos.

Abans de començar aquest camí ens veiem obligats a advertir al lector que la cartografia de *l'entrellat del món* es troba incompleta. Però creiem que les traces ja dibuixades en marquen el camí a seguir per assolir-ne la seva plenitud. L'explicació definitiva

¹Per una explicació detallada consulteu (10) o (11).

de l'emergència de comportaments oscil·latoris tan complexes com la turbulència o la dinàmica del cervell podria estar més aprop del què ensensem (20).

1. INTRODUCCIÓ

2

Sistemes Dinàmics

L'objectiu d'aquest treball és orientar el lector perquè pugui alliberar-se de la problemàtica comentada a la introducció. En aquest capítol donarem un repàs als conceptes bàsics de la dinàmica moderna, presentant què són i com es poden descriure els sistemes dinàmics (1)(21), per després poder passar a veure què és el que poden arribar a fer (2)(20).

Definir un sistema dinàmic vol dir establir la seva estructura i identificar les magnituds que determinen el seu comportament i les interdependències que entre elles hi pugui haver. Aquelles propietats que no canvien mentre el sistema evoluciona són anomenades *paràmetres* i les que sí que ho fan són les *variables*. Els graus de llibertat corresponen a les variables que evolucionen amb una certa autonomia unes de les altres. L'*espai de fases* o *espai dels estats*, definit pel conjunt de variables que descriuen els graus de llibertat, resulta molt convenient per analitzar el comportament del sistema. Cada punt d'aquest espai correspon a un possible *estat del sistema* i la seva evolució, en forma de trajectòria, dóna una imatge gràfica del que està passant. La dimensió de l'espai de fases, és a dir, el nombre de variables associades a graus de llibertat, constitueix la *dimensió* del sistema dinàmic en estudi.

D'altra banda, si considerem la família de sistemes d'identica estructura però amb diferents valors dels paràmetres, tenim l'anomenat *espai de paràmetres*. Cada punt d'aquest espai representa un sistema de la família que, donades unes certes condicions inicials per a les variables, evolucionarà per l'espai de fases d'una forma determinada. Ara bé, en considerar sistemes amb paràmetres diferents resulta que es poden observar comportaments qualitativament molt diferents. En certes zones de l'espai de paràmetres

2. SISTEMES DINÀMICS

els comportaments són senzills i fàcils d'entendre, mentre que en altres zones poden arribar a ser extraordinàriament complicats. El fet significatiu és que els canvis es produeixen per a uns valors concrets dels paràmetres. Aquests canvis consisteixen en l'aparició de nous tipus de respostes i són anomenats *bifurcacions*. El seguiment de les successives bifurcacions, que, en variar algun paràmetre, connecten un comportament elemental amb un de complicat, és una forma d'arribar a entendre què és el que ha passat i per què el sistema està fent el que fa.

A la pràctica, però, els paràmetres normalment no són fàcils de variar ni tampoc són fixos del tot. L'anàlisi experimental només és factible quan es disposa d'algun *paràmetre de control* fàcilment manipulable des de l'exterior, com és el cas d'aquells sistemes que tenen una entrada regulable d'energia o de material. Els experiments seran més afinats com més fixos estiguin la resta de paràmetres i com més precisió es disposi en la variació del paràmetre de control. S'ha de tenir en compte que, quan hi ha dinàmica complexa, les bifurcacions es produeixen de forma acumulada i poden succeir moltes coses en un petit rang de valors d'un paràmetre. Lògicament, en les simulacions numèriques de sistemes matemàtics tots els paràmetres són controlables i, a més, ho són amb molta precisió. D'altra banda, fora del laboratori, els sistemes, diguem-ne naturals, no acostumen a tenir paràmetres controlables i en principi no admeten experimentació. L'única cosa que podem fer és observar i prendre'n nota. A partir de l'anàlisi del comportament observat i d'altra informació que tinguem, podem intentar establir un model matemàtic del sistema. De fet, delimitar un sistema dinàmic dins la realitat natural no és gens fàcil, ja que les interaccions amb el medi fan sovint indestruïble el sistema en qüestió d'un sistema més ampli.

Els sistemes dinàmics matemàtics més corrents són sistemes acoblats d'equacions diferencials ordinàries que descriuen l'evolució temporal d'un conjunt de variables, X_j , tal que

$$\frac{dX}{dt} = F(X, \mu), \quad X \in \mathbb{R}^N, \quad \leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_N; \mu) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_N; \mu) \\ \dots = \dots\dots\dots \\ \frac{dx_N}{dt} = f_N(x_1, x_2, \dots, x_N; \mu) \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

on la μ representa el conjunt de paràmetres i les funcions f_j contenen alguna no-linealitat en les variables X_j . Fixem-nos ara que l'acoblament de les equacions significa anells de realimentació entre les variables i que l'espai de fases $(X_1, \dots, X_N)$ és òbviament de dimensió N . El fet que les derivades temporals de les variables defineixen el vector tangent a la trajectòria en cada punt permet veure el conjunt de trajectòries com formant part d'un flux que circula per l'espai de fases. Aquesta imatge resulta molt suggestiva i ajuda a interpretar els fenòmens. Moltes lleis de la natura tenen la forma d'una equació diferencial com la 2.1. És a dir, les lleis acostumen a expressar el ritme de variació temporal de certes variables en funció de l'estat en que es troba el sistema. Ara bé, a l'hora d'establir un model d'una situació real, sovint ens trobem que la descripció dels mecanismes involucrats ens porta a sistemes d'equacions diferencials en derivades parcials. Això és degut al fet que tot sistema s'ha de trobar per força distribuït per una certa zona de l'espai i que normalment les interaccions impliquen fluxos d'un lloc a l'altre. Les equacions en derivades parcials són sistemes difícils de tractar. Per començar, tenen dimensió dinàmica infinita ja que les variables són funcions de l'espai. Dit d'altra manera, si es vol determinar l'estat inicial del sistema s'ha de donar un nombre infinit de valors. La formació d'estructures espaciotemporals i els fenòmens de turbulència posen de manifest la potencialitat dinàmica de la multitud de graus de llibertat de determinades equacions en derivades parcials. Ara bé, el fet és que en molts casos la dimensió dinàmica efectiva del sistema és relativament baixa i llavors és possible reduir el sistema original a un model en derivades ordinàries.

La no-linealitat no significa que el control no és possible. Està ple de processos no lineals que són ordenats, predictibles i conseqüentment controlables. El rellotge de paret o de pèndol segueix perfectament un cicle estable d'un moviment no lineal. Petits impulsos externs al pèndol provinents de pertorbacions mecàniques del rellotge no afectaran l'òrbita periòdica característica, tal com passaria per un sistema lineal en el qual els impulsos canvien permanentment l'amplitud del moviment. El rellotge de pèndol sempre retorna al mateix cicle estable, un cicle límit, el qual ve determinat per la llargada i la massa del pèndol i la quantitat d'energia afegida a cada cicle pel mecanisme d'escapament, normalment el pes mogut per la gravetat. Controlem el període del cicle simplement alterant la longitud del pèndol, podent així ser ajustat per mantenir un temps exacte, sempre i quan ens enrecordem de donar-li corda un cop per setmana.

2. SISTEMES DINÀMICS

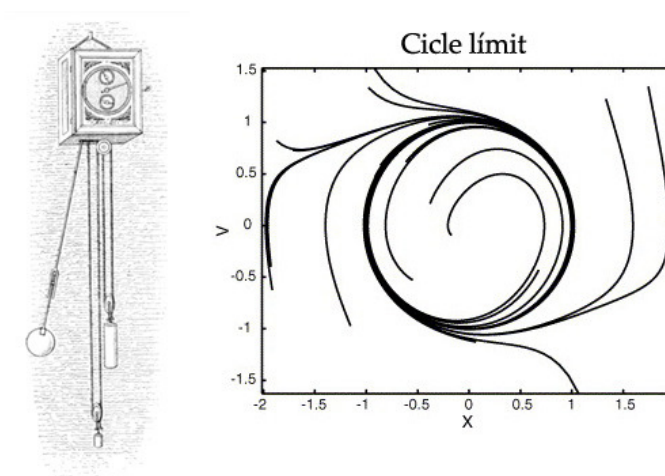


Figura 2.1: Dibuix del primer rellotge de pèndol, dissenyat pel científic Christiaan Huygens el 1657 (22), i el seu respectiu cicle límit a l'espai de fases.

Aquest mecanisme no-lineal ha protagonitzat durant segles el paradigma de la visió mecànica del món. El rellotge de paret ens mostra els dos atractors dinàmics bàsics tan característics d'aquesta visió del món: el punt estable (el punt atractor) i el cicle estable (el cicle límit). Deixem de donar corda al rellotge, i no farà res inesperat i estrany, disminuirà fins quedar-se quiet a l'equilibri estàtic. Donem-li corda, fem-li una empenteta des de la seva posició de repòs, i l'amplitud començarà a augmentar a causa dels impulsos d'energia a cada cicle provinents del mecanisme d'escapament fins que el pèndol arribi a al cicle estable. Pel contrari, si li donem una empenta gran, l'amplitud disminuirà fins posicionar-se en el mateix cicle límit. Per ambdues situacions ens trobem que el rellotge es posa a oscil·lar a la seva òrbita característica, donant així un immutable, tic-tac que és el cor de l'Univers determinista.

Convé remarcar el fet significatiu que en el comportament de sistemes reals de naturalesa radicalment diferent es poden observar fenòmens essencialment iguals. Per exemple, l'*oscil·lació autosostinguda* del rellotge de paret la podem trobar a qualsevol altra camp fora de la mecànica¹ sempre i quan les pertorbacions externes sobre el sistema romanguin constants. Altres fenòmens omnipresents ben coneguts són els *cicles d'histèresi*, les *sincronitzacions* de sistemes lleugerament acoblats, *intermitències* i *caos*.

¹ A la Química, l'oscil·lació autosostinguda més popularitzada és la reacció de BelousovZhabotinsky, i a la Dinàmica de Fluids hi trobem un exemple en el canal de vòrtexs de von Kármán, figura 3.11.

Ara bé, s'ha de deixar ben clar que un sistema real només adquireix la condició de sistema dinàmic en el moment en què es disposa d'un model matemàtic que es comporta de forma semblant. Això no s'ha aconseguit en alguns fenòmens observats, per tant, la categoria de sistema dinàmic en aquests casos és, de moment, no gaire més que una suposició.

2.1 Sistemes autònoms i no autònoms

Un sistema dinàmic autònom d'ordre n és definit per l'equació d'estat

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.2)$$

on $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ és l'estat al temps t , i $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és el camp vectorial. Atès que el camp vectorial no depèn del temps, podem escollir com a temps inicial $t_0 = 0$.

Per tal de mostrar la dependència explícita de les condicions inicials, la solució de l'equació (2.2) s'acostuma a escriure com $\phi_t(x_0)$. S'anomena *flux* la família d'aplicacions $\phi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que aconsegueixen les dues condicions, $\phi_{t_1+t_2} = \phi_{t_1} \circ \phi_{t_2}$ i $\phi_0(x) = x$.

S'anomena *trajectòria* a partir de x_0 , el conjunt de punts $\{\phi_t(x_0) : -\infty < t < \infty\}$. El *sistema dinàmic* (2.2) és lineal si el camp vectorial f és lineal. Un *sistema dinàmic no autònom* d'ordre n ve definit per l'equació d'estat:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.3)$$

En els sistemes no autònoms, el camp vectorial depèn del temps, cosa que significa que no podem fixar arbitràriament el temps inicial. Denotem la solució de l'equació (2.3) que passa per x_0 a l'instant t_0 , per $\phi_t = (x_0, t_0)$. Si el camp vectorial $f(x, t)$ és lineal en x llavors el sistema dinàmic (2.3) és lineal.

Si existeix un $T > 0$ tal que $f(x, t) = f(x, t + T)$ per a tots els x i t , llavors el sistema és *periòdic* en el temps amb període T . El període T més petit s'anomena període mínim.

És important saber que un sistema no autònom d'ordre n amb període T sempre es pot convertir en un sistema autònom d'ordre $n + 1$ si afegim una nova variable $\theta = 2\pi t/T$. El sistema autònom ve donat per

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \theta T/2\pi), & x(t_0) &= x_0 \\ \dot{\theta} &= 2\pi/T, & \theta(t_0) &= 2\pi t_0/T \end{aligned} \quad (2.4)$$

2. SISTEMES DINÀMICS

Atès que f és periòdica en el temps amb període T , el sistema és periòdic en θ amb període 2π . Així doncs, els plans, $\theta = 0$ i $\theta = 2\pi$ són idèntics i, per tant, podem passar d'un espai Euclidià $\mathbb{R}^{n+1}$ a l'espai cilíndric $\mathbb{R}^n \times S$ on $S^1 = [0, 2\pi)$ defineix el cercle.

La solució de 2.4 en l'espai cilíndric és

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_t(x_0, t_0) \\ \frac{2\pi t}{T} \bmod 2\pi \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

on la funció mòdul restringeix $0 < \theta < 2\pi$. Utilitzant aquesta transformació, la teoria per a sistemes autònoms es pot aplicar a sistemes no autònoms periòdics.

Per a qualsevol t suposarem que ϕ_t i $\phi(x, t_0)$ són diferenciables i invertibles.

Aquesta suposició no és restrictiva i té unes conseqüències significatives:

1. Existeix una solució del sistema per a qualsevol t .
2. Per a uns temps t, t_0 qualsevol $\phi_t(x) = \phi_t(y)$ si i només si $x = y$. Això implica, tenint en compte que $\phi_{t_0+t_1} = \phi_{t_0} \circ \phi_{t_1}$, que per un sistema autònom donat un punt inicial existeix una única trajectòria, i que dues trajectòries diferents no poden interseccionar.
3. Per uns temps t, t_0 qualsevol $\phi_t(x, t_0) = \phi_t(y, t_0)$ si i només si $x = y$. Això implica que per un sistema no autònom, donats un punt i temps inicial existeix una única solució. Tanmateix, $t_0 \neq t_1$, és possible que existeixi un temps t tal que $\phi_t(x, t_0) = \phi_t(y, t_1)$ i un temps t' tal que $\phi_{t'}(x, t_0) \neq \phi_{t'}(y, t_0)$ cosa que implica que, a diferència del cas de sistemes autònoms, en els sistemes no autònoms dues trajectòries diferents es poden interseccionar sempre i quan ho facin per temps diferents.
4. Com que existeix la derivada de la trajectòria per a qualsevol punt inicial, i a més a més no és singular, llavors $\phi_t(x)$ i $\phi_t(x, t_0)$ són contínues.

2.2 Sistemes discrets

Una aplicació $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ defineix un sistema discret mitjançant l'equació

$$x_{k+1} = P(x_k), \quad k = 0, 1, 2 \dots \quad (2.6)$$

Donat un punt inicial x_0 , successives aplicacions de P generen un conjunt de punts $\{x_0\}_{k=0}^{\infty}$ que formen la trajectòria. Un sistema continu sempre es pot simplificar reduint-lo a un de discret¹. La idea la va desenvolupar Henri Poincaré i consisteix a seleccionar informació de la trajectòria a l'espai de fases fixant-se només en les seves interseccions amb un hiperplà de dimensió inferior en una unitat a la del sistema. El resultat del procés és un sistema discret o aplicació de Poincaré que ens va donant els punts successius, cada un en funció de l'anterior. Les variables de l'aplicació són les coordenades sobre el pla de la secció i, per tant, el seu nombre és inferior en una unitat al del sistema continu original. El fet més significatiu és que, si hem escollit correctament el pla, no perdem gens d'informació sobre que li passa al sistema quan variem un paràmetre de control i, en canvi, hem reduït el nombre de variables. Si només ens fixem en el retrat de fases en el pla, sense preocupar-nos de l'evolució temporal, tenim el que s'anomena secció de Poincaré, que permet veure els detalls de la trajectòria amb més precisió. Cal destacar que la utilització de mapes de Poincaré és una eina important per a l'estudi del flux d'un sistema continu i, a més a més, permet il·lustrar conceptes importants sense haver d'entrar en la problemàtica de la resolució de sistemes d'equacions. No obstant, pels sistemes que estudiarem al següent capítol no ens seran de gaire utilitat degut a l'elevada diversitat de formes que podrà arribar a presentar una mateixa trajectòria en el seu espai de fases.

2.3 Conjunts límits

A continuació veurem què és un *conjunt límit* i un *estat estable*.

L'*estat estable* fa referència al comportament asimptòtic del sistema quan t tendeix a $+\infty$. La diferència entre una trajectòria i el seu estat estable s'anomena *transitori*. L'equivalent a l'estat estable a l'espai dels estats són els conjunts límits.

Un punt y és un *punt ω -límit* d' x si, per a qualsevol entorn U d' y , quan $t \rightarrow +\infty$ aleshores $\phi_t(x)$ entra repetidament a U .

S'anomena *conjunt ω -límit* al conjunt $L(x)$ format per tots els punts ω -límit d' x .

¹Tot i així cal tenir en compte que els sistemes dinàmics discrets tenen algunes limitacions inherents. En concret, i sense entrar a la problemàtica de la discretització del temps, els mecanismes de barreja no lineal d'oscil·lacions tan rellevants per l'entrellat del món hi són absents.

2. SISTEMES DINÀMICS

Un conjunt ω -límit és *atractiu* si existeix un entorn obert U de L tal que $L(x) = L$ per a tot $x \in U$. Els conjunts límits atractius són especialment interessants perquè són els únics observables experimentalment.

La *conca d'atracció* B_L d'un conjunt límit atractiu L és la unió de tots els entorns oberts U abans esmentats. B_L és el conjunt de totes les condicions inicials que tendeixen cap a L quan $t \rightarrow \infty$.

Podem també definir punts i conjunts α -límit. Les definicions són idèntiques a les anteriors però canviant $t \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow -\infty$.

Tot i que les anteriors definicions corresponen a sistemes autònoms continus, també s'apliquen a sistemes discrets i es poden extrapolar a sistemes no autònoms realitzant la transformació descrita a 2.2 o bé mitjançant la transformació a través de mapes de Poincaré.

Un sistema lineal estable només existeix en un conjunt límit, i la conca d'atracció és tot l'espai, és a dir, l'estat estable és independent de les condicions inicials. Per contra, és típic trobar en els sistemes no lineals diferents conjunts límits, cadascun amb una conca d'atracció diferent. En aquest cas les condicions inicials determinen quin conjunt límit s'assoleix.

Per exemple, un *punt d'equilibri* x_{eq} d'un sistema autònom és una solució constant de l'equació, és a dir, $x_{eq} = \phi_{eq}(X_{eq})$ per a tot t . En un punt d'equilibri el camp vectorial s'anul·la, així doncs $f(x) = 0$ implica que x és un punt d'equilibri. I una solució d'un sistema autònom $\phi(x^*)$ és *solució periòdica* si, per tot t ,

$$\phi_t(x^*) = \phi_{t+T}(x^*) \quad (2.7)$$

per un període mínim $T > 0$. Cal assenyalar que x^* no és únic, ja que qualsevol punt que es trobi dins la solució periòdica també complirà l'equació 2.7. Un canvi en el temps inicial implica un canvi en x^* . Tota solució periòdica per a la qual existeixi com a mínim un entorn que no contingui cap altra solució periòdica és *aïllada*. En el cas de sistemes autònoms, una solució periòdica aïllada s'anomena *cicle límit*, vegeu la figura 2.1.

2.4 Oscil·ladors

Abans hem classificat els sistemes en dos tipus: no autònoms i autònoms. Els primers, a diferència dels segons, tenen una dependència explícita del temps en les equacions

que descriuen la seva dinàmica. Dins el grup de sistemes autònoms podem establir una segona classificació: *oscil·ladors passius i actius*.

El pèndol i els oscil·ladors polinomials, anomenats oscil·ladors de Duffing, són els exemples més coneguts d'oscil·ladors passius. L'amplitud i el període d'aquests sistemes depenen de les condicions inicials.

Pel contrari, el rellotge de pèndol vist en anterioritat és un exemple de sistema actiu. Els sistemes actius es caracteritzen, a part de presentar absorcions d'energia dependent de l'estat del sistema, per tenir fonts d'energia contínues i independents del temps. Aquestes fonts contínues d'energia permeten l'aparició de bifurcacions de Hopf que donen lloc a l'existència d'autooscil·lacions periòdiques amb una conca d'atracció concreta. L'oscil·lador de Van der Pol és un dels sistemes actius més senzills i estudiats.

Quan apliquem una pertorbació externa dependent del temps sobre un sistema autònom aquest es converteix en un sistema no autònom. Aquesta pertorbació externa afegeix un nou grau de llibertat al sistema. A aquest tipus de sistemes no autònoms se'ls coneix com *oscil·ladors forçats*. De la mateixa manera que parlem de sistemes autònoms passius i actius, podem distingir dins dels sistemes no autònoms entre *oscil·ladors passius forçats* i *oscil·ladors actius forçats*. Els primers tenen efectes d'histèresi, generació d'harmònics i subharmònics i respostes caòtiques. Els segons es caracteritzen per fenòmens d'acoblament no lineal de freqüències així com per poder tenir comportaments caòtics.

Començarem la discussió dels oscil·ladors, pel sistema més senzill, l'oscil·lador lliure.

2.4.1 El pèndol simple: l'oscil·lador lliure

L'oscil·lador lliure per excel·lència és el pèndol simple. Amb una història centenària, el pèndol ha jugat un paper fonamental en el desenvolupament de la física. En particular, el pèndol simple va permetre formular al físic holandès del segle XVII Christiaan Huygens la llei de la conservació de l'energia mecànica.

Així doncs, considerem un pèndol sense fricció sobre la Terra i, suposant que es mou en un pla, caracteritzem la seva posició a partir de l'angle θ entre la línia del pèndol i la vertical en direcció avall. La seva dinàmica ve descrita per l'equació:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \quad (2.8)$$

2. SISTEMES DINÀMICS

I les seves variables són la posició i velocitat angular. Reescrivint l'equació en forma d'equacions diferencials ordinàries, tenim que:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\omega_0^2 \sin\theta \quad (2.9)$$

on $\omega_0^2 = g/l$ descriu la relació entre l'acceleració de la gravetat i la longitud del pèndol i constitueix l'únic paràmetre del sistema. La no-linealitat està continguda en la funció $\sin\theta$, que prové de la força total que actua sobre la massa del pèndol. Una idea global del que pot fer el pèndol ens la dona l'anomenat retrat de l'espai de fases, que no és res més que el conjunt de trajectòries que el sistema pot descriure en aquest espai. En absència de fricció, les trajectòries corresponen a línies d'energia constant, i són tal com mostra la figura 2.2. Comencem pels anomenats punts fixos en els quals les derivades temporals de les variables s'anul·len. Això ho satisfan els punts $(\theta, \omega) = (0, 0)$ i $(\pm\pi, 0)$ que corresponen al pèndol quiet a baix o a dalt, respectivament. La solució $(0, 0)$ és estable ja que, si el pèndol hi és col·locat, s'hi queda i al seu voltant tenim tot un seguit de circumferències de radi $(2E/mgln)^{1/2}$ corresponen a oscil·lacions harmòniques amb freqüència ω_0 i energia E . Aquestes oscil·lacions constitueixen el règim lineal del pèndol, que és vàlid mentre $\theta \ll 1$ i $\sin\theta \sim \theta$ i en què el període és igual a $2\pi(l/g)^{1/2}$ independentment de l'amplitud d'oscil·lació. El conjunt del punt fix estable i el continu d'òrbites periòdiques és anomenat *centre*. A mesura que l'amplitud va creixent les circumferències es distorsionen i el període d'oscil·lació va augmentant, fins que arribem a la trajectòria d'energia $E = 2mgl$ que connecta entre si els altres dos punts fixos $(\pm\pi, 0)$ que corresponen al pèndol quiet a dalt. Una part d'aquesta trajectòria va de $(+\pi, 0)$ a $(-\pi, 0)$ i l'altra va en sentit contrari. Ambdós recorreguts de color verd són doblement asimptòtics, ja que requereixen un temps infinit tant per sortir del punt amb velocitat inicial nul·la, com per arribar-hi i parar-s'hi. Els punts $(\pm\pi, 0)$ són selles i les trajectòries que hi arriben o en surten constitueixen les seves varietats invariants estable o inestable, respectivament. Cap altra trajectòria arriba o surt dels punts sella. Les varietats invariants de les selles també fan el paper de separatrius de dos tipus diferents de moviment del pèndol: l'oscil·latori i el de rotació. Les oscil·lacions tenen lloc a l'interior de les separatrius de color verd mentre que les trajectòries de més energia corresponen a estats de rotació indefinida en un sentit o en el contrari. Les separatrius són dues òrbites que connecten els dos punts fixos selles, una òrbita d'aquest tipus s'anomena *òrbita heteroclínica*. Per a altres sistemes s'han

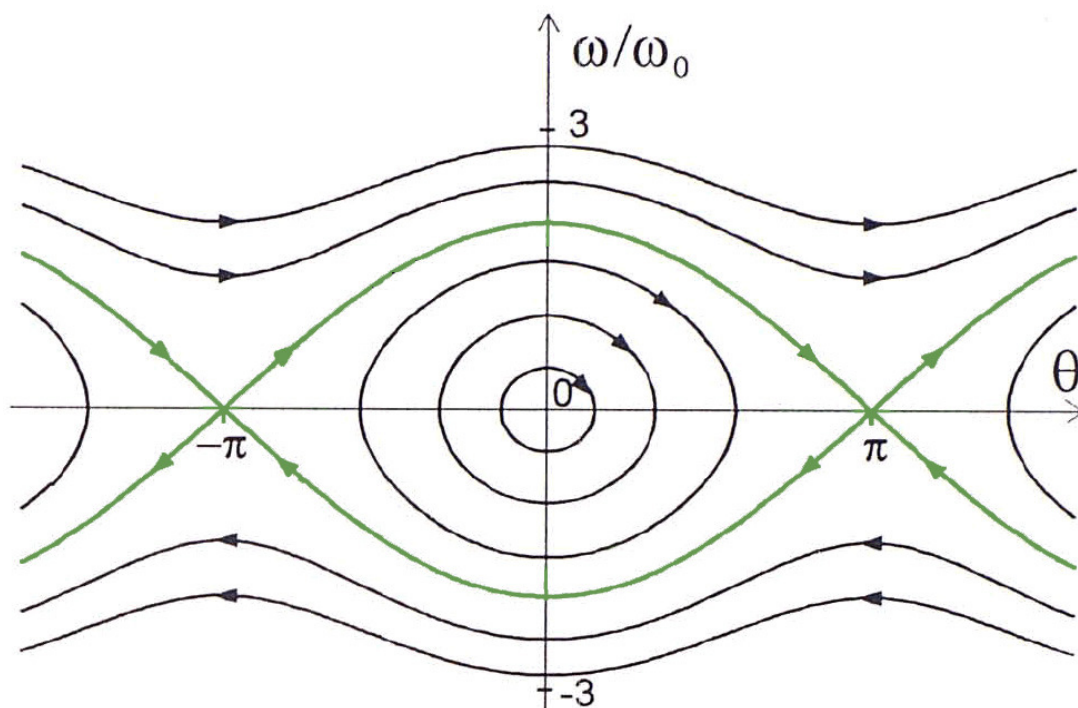


Figura 2.2: Retrat de l'espai de fase d'un pèndol sense fricció sotmès a la força de la gravetat. Els eixos descriuen la posició i la velocitat angular, aquesta última normalitzada respecte a ω_0 . L'origen de coordenades representa el pèndol a baix i quiet, i al seu voltant tenim una serie de trajectòries per a diverses condicions inicials o energies. Les fletxes indiquen el sentit del flux. Les òrbites tancades descriuen oscil·lacions i les trajectòries obertes corresponen a moviments de rotació. La separació entre els dos tipus de moviments es dona a les trajectòries que connecten els punts $(\pm\pi, 0)$ entre si. Aquests dos punts representen el pèndol quiet a dalt, havent-hi arribat per una o altra banda. Són punts no estables amb trajectòries d'entrada i de sortida, ambdues asimptòtiques en el temps, color verd. Són punts sella, un element essencial per a la dinàmica de sistemes.

2. SISTEMES DINÀMICS

trobat casos en què una òrbita surt d'un sol punt estable sella per una direcció concreta i retorna amb un temps infinit al mateix punt sella per una altra direcció. Aquestes òrbites també constitueixen separatrius i s'anomenen *òrbites homoclíniques*.

Fixem-nos en el fet que l'energia no és un paràmetre del sistema dinàmic i que el seu paper és determinar les condicions inicials. D'altra banda, la variació de l'únic paràmetre del pèndol, que és el quocient $g/l = \omega_0^2$, no provoca cap canvi a l'espai de fases. No hi ha bifurcacions. Cal assenyalar també que cap solució és estructuralment estable, atès que al voltant de qualsevol solució sempre en podem trobar una altra de diferent tant propera a la primera com vulguem. Aquest comportament és característic dels sistemes no dissipatius on les conques d'atracció coincideixen amb les seves solucions.

2.4.2 El pèndol esmorteït. Equació de Duffing's

En l'exemple del pèndol simple hem suposat que no existia fregament. En el món real un pèndol que inicialment està en moviment acaba sempre per aturar-se. Això és degut a l'existència del fregament, responsable de la dissipació d'energia. Si hi afegim un terme dissipatiu tenim el pèndol esmorteït:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\gamma y - \omega^2 x\end{aligned}\tag{2.10}$$

Si imposem que $\gamma < 0$ podem comprovar que el sistema és dissipatiu, és a dir, que l'energia disminueix a mesura que augmenta el temps. Aquest és un sistema autònom de segon ordre amb dos punts d'equilibri donats per $(0,0)$, $(\pi,0)$. Els punt $(0,0)$ és un node atractiu asimptòticament estable i el punt $(\pi,0)$ és un punt sella. En aquest cas no existeixen solucions periòdiques, el terme dissipatiu fa que l'únic estat estable sigui el d'energia nul·la. Aquest terme dissipatiu també és el responsable de la contracció de les trajectòries.

Existeix un sistema més general que engloba com a casos particulars els dos anteriors, és l'anomenada equació de Duffing's ¹ que correspon a un sistema autònom

¹Els primers estudis seriosos sobre oscil·ladors forçats no-lineals varen ser realitzats a principi del segle XX quan Georg Duffing (1918) va examinar sistemes mecànics amb forces restauradores no-lineals i quan Balthasar van der Pol va estudiar sistemes elèctrics amb esmorteïment no-lineal.

periòdic passiu.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 - \epsilon y\end{aligned}\tag{2.11}$$

Les característiques més importants d'aquest sistema, són les típiques dels sistemes passius: la dependència de l'amplitud en la freqüència i l'existència d'òrbites homoclíniques i heteroclíniques.

2.4.3 Oscil·ladors passius modulats

En aquest apartat considerarem l'equació de Duffing's afegint-hi una pertorbació externa periòdica en el temps:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 - \epsilon y - \gamma \cos(\omega_E t)\end{aligned}\tag{2.12}$$

Una característica interessant d'aquests sistemes és l'anomenada *catàstrofe del pic* (Cusp Catastrophe) resultant d'una ressonància no lineal. Tal i com hem vist anteriorment en el sistema autònom l'amplitud depèn de la freqüència, si introduïm una modulació externa suau en el sistema observem, representant l'amplitud en funció de la freqüència, que es produeix un pic de ressonància per a freqüències externes properes a la pròpia del sistema, amb un màxim quan les dues coincideixen. Si augmentem la modulació s'observa com la forma d'aquest pic que inicialment forma una corba pràcticament simètrica, es plega lateralment fins arribar a ser trivaluada, és a dir, fins que existeixen tres solucions de diferent amplitud per a la mateixa freqüència. Aquest és un cas de biestabilitat en la dinàmica i està acompanyada de fenòmens d'histèresi.

Un altre fenomen observable en aquest tipus de sistemes són les anomenades excitacions harmòniques. A diferència de les ressonàncies lineals, es poden produir ressonàncies no lineals per a valors de les freqüències pròpia i externa molt diferents, només cal que el seu quocient sigui un valor proper a un número racional.

D'acord amb la relació entre la freqüència pròpia (ω_0) i la externa (ω_E) es poden classificar les ressonàncies:

1. *Ultraharmòniques* quan $\omega_0 = n \omega_E$.
2. *Subharmòniques* quan $\omega_0 = \omega_E/n$.
3. *Ultrasubharmòniques* quan $\omega_0 = m\omega_E/n$.

on m , n són enters.

2. SISTEMES DINÀMICS

2.4.4 L'oscil·lador de van der Pol

Un sistema més realista és aquell en què suposem que γ depèn de l'amplitud, si suposem que γ es pot expressar com:

$$\gamma(x) = -\gamma_0 \left[1 - \frac{x^2}{x_0^2} \right] \quad (2.13)$$

i ho imposem a l'equació obtenim l'anomenada equació de Van der Pol¹:

$$\ddot{x} - \gamma_0 \left[1 - \frac{x^2}{x_0^2} \right] \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (2.14)$$

que es pot reescriure amb les adients normalitzacions en el sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (\epsilon - x^2) y - x \end{aligned} \quad (2.15)$$

Aquest sistema correspon a un sistema autònom de segon ordre. L'equació de Van der Pol descriu el comportament d'un oscil·lador pertorbat com el cas del rellotge de pèndol. Aquest sistema tot i la seva senzillesa és de gran interès per a la dinàmica de sistemes i ara veurem perquè.

Aquest sistema és un oscil·lador actiu, és a dir, existeix una font d'energia externa. Si $\epsilon > 0$ el terme dissipatiu és negatiu, i l'energia és injectada en comptes de ser absorbida. existeix un punt fix a l'origen de coordenades, si $\epsilon < 0$ aquest punt és un punt fix estable i si $\epsilon > 0$ aquest punt fix és un focus inestable, i ens apareix una solució periòdica que correspon a un cicle límit al voltant de l'origen de coordenades. La inestabilitat d'aquest punt es deu a la injecció d'energia. Ara bé, si anem injectant indefinidament energia la solució divergeix. El terme en x^2 té l'efecte oposat, per tant, si x pren valors superiors a $\epsilon^{1/2}$ el terme dissipatiu esdevé negatiu i el sistema dissipa energia, cosa que ens assegura que la solució estarà limitada. La competició entre aquests dos fenòmens contraposats és la responsable de l'aparició d'un cicle límit. El fenomen de l'aparició d'un cicle límit es coneix amb el nom de *bifurcació de Hopf*, vegeu l'apartat 2.7.

¹El 1926, Balthasar van der Pol va formular aquesta equació per descriure oscil·lacions autosostingudes del circuit d'un tríode.

2.4.5 Equació de Van der Pol amb modulació externa.

Si afegim una modulació externa i periòdica a l'equació de Van der Pol, obtenim un sistema no autònom periòdic de segon ordre

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (1 - x^2)y - x + A \cos(2\pi t/T)\end{aligned}\tag{2.16}$$

La principal diferència que existeix amb l'oscil·lador de Duffing forçat és que el sistema pot oscil·lar encara que no existeixi la modulació externa. Un fenomen molt interessant és el que es dona quan el sistema deixa d'oscil·lar amb la seva freqüència pròpia per passar a oscil·lar a la freqüència externa, aquest fenomen s'anomena *aferrament de freqüències* ("frequency locking"). El sistema a més de poder oscil·lar a la freqüència externa (ω_E) també ho pot fer per a freqüències iguals a $n\omega_E/m$, on m, n són enters.

Les zones d'acoblament donen lloc a l'aparició de finestres periòdiques, aquestes finestres periòdiques es poden superposar de manera que diverses solucions periòdiques poden coexistir per a un mateix valor de la freqüència externa. La transició d'aquests atractors es produeix per a seqüències de desdoblament de període.

Un sistema actiu forçat interessant és l'anomenat *Brusselator Forçat*. Aquest sistema descriu una reacció química, on la injecció dels reactius no és constant sinó que està modulada. El brusselator forçat ha estat àmpliament estudiat numèricament ja que és un dels sistemes actius forçats més interessants atesa la seva dinàmica rica i variada.

2.5 Sistemes conservatius i sistemes dissipatius

En els *sistemes conservatius*, la dinàmica consisteix en el moviment indefinit d'uns cossos als quals en un cert moment se'ls hi ha donat una energia determinada.

Remarquem les peculiaritats dels sistemes conservatius:

- * la dimensió dinàmica mínima és dos, una posició i una velocitat,
- * a l'espai de fases podem tenir centres, punts sella i trajectòries obertes,
- * el volum ocupat per un conjunt de punts a l'espai de fases es conserva en la seva evolució en transcórrer el temps, tal com ho expressa el teorema de Liouville, i,
- * l'evolució és reversible en el temps, la qual cosa vol dir que les equacions dinàmiques no canvien si invertim el signe del temps o que el moviment contrari és tan possible com el que tenim.

2. SISTEMES DINÀMICS

Ara bé, deixant de banda alguns sistemes físics molt particulars, la gran majoria de sistemes dinàmics reals contenen mecanismes que tendeixen a relaxar les variables vers uns valors determinats. Aquests mecanismes, en el cas d'un sistema físic, tendeixen a conduir-lo vers l'equilibri tèrmic i normalment li provoquen pèrdues d'energia. Estem parlant dels anomenats *sistemes dissipatius*, que, des d'un punt de vista general, es caracteritzen perquè contenen una microestructura amb nombrosos graus de llibertat, la gran majoria dels quals, però, evolucionen de forma tal que els seus efectes poden ser descrits estadísticament com a mecanismes de relaxació sobre un nombre reduït de variables dinàmiques realment significatives. Pel que acabem de dir, els sistemes dissipatius tendeixen a l'equilibri, estat en el qual el sistema dinàmic no fa res. Si volem fenòmens dinàmics hem d'alimentar el sistema amb un subministrament exterior que faci créixer alguna de les variables en contraposició a la dissipació i el mantingui lluny de l'estat d'equilibri. Dins de la física això té a veure amb la termodinàmica lluny de l'equilibri o dels processos irreversibles.

Com a peculiaritats dels sistemes dissipatius en relació amb els conservatius són de remarcar:

- * irreversibilitat en el temps, a causa de la unidireccionalitat de la dissipació,
- * possibilitat de sistemes amb dimensió igual a 1, ja que les variables no són necessàriament la posició i la velocitat de cossos en moviment, i
- * existència a l'espai de fases dels anomenats atractors, a més de les selles i els contraris dels atractors, els repulsors.

Els atractors són singularitats vers on convergeixen asimptòticament totes les trajectòries que passen pel seu voltant i són conseqüència de l'acció dissipativa que tendeix a contraure el volum del flux que circula per l'espai de fases. Tot el conjunt de punts a partir dels quals s'arriba a un determinat atractor forma la seva conca d'atracció. La situació més corrent és tenir diversos atractors que coexisteixen amb les seves respectives conques d'atracció separades per les varietats estables d'ens sella (vegeu figura 2.3). Les conques d'atracció cobreixen tot l'espai de fases de manera que, si col·loquem un sistema en unes certes condicions inicials i el deixem evolucionar, anirà a parar, inevitablement, a l'atractor corresponent. D'atractors, n'hi ha de molts tipus i, com és lògic, el nombre de possibilitats creix amb la dimensió de l'espai de fases. Aquí és instructiu recordar que els sistemes conservatius no tenen atractors. Per exemple, el punt $(0, 0)$ en el cas del pèndol no és atractiu.

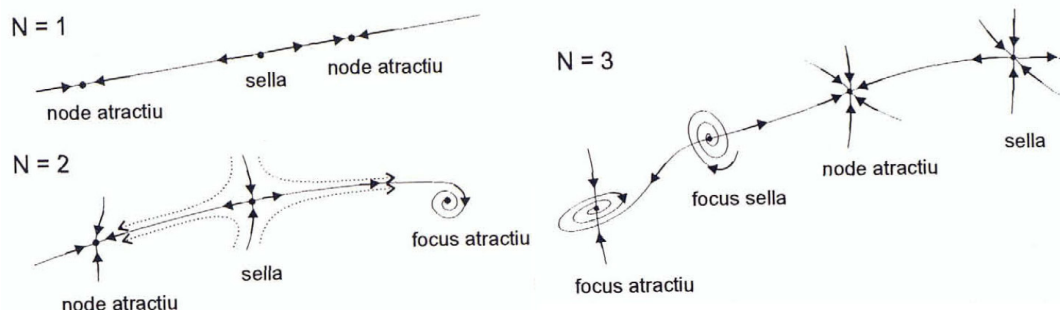


Figura 2.3: Representació d'alguns punts fixos als espais de fases de dimensió 1, 2 i 3. Les fletxes indiquen el sentit del flux i, en el cas de les selles, representen les varietats invariants atractiva i repulsiva. Segons els casos, el flux al voltant d'un punt pot ser radial, fer espirals o una combinació d'ambdós. Recordem que les varietats invariants d'una sella contenen totes les trajectòries que arriben o surten del punt mentre que a un atractiu li arriben trajectòries per totes bandes. Els repulsors són iguals als atractors però amb el sentit del flux invertit. En un espai unidimensional les selles no tenen varietat atractiva i de fet són repulsors.

2.6 Dispositius BOITAL

El nom BOITAL respon a l'acrònim de biestabilitat òptica induïda tèrmicament amb absorció localitzada. Un dispositiu BOITAL consisteix bàsicament en una cavitat interferomètrica del tipus Fabry-Pérot on el mirall anterior és parcialment absorbent el mirall posterior és totalment reflector i l'espaiador de la cavitat consisteix en un conjunt de N capes de diferents materials transparents. El paper d'aquests materials és produir efectes termoòptics o variacions del camí òptic amb la temperatura, i estan ordenats de tal manera que els seus efectes són alternativament contraris. Els sistemes dinàmics en estudi consisteixen en un d'aquests dispositius il·luminat amb un feix continu de llum làser. La potència de la llum incident és el nostre paràmetre de control mentre que la potència de la llum reflectida ens informa del comportament dinàmic del dispositiu, vegeu la figura 2.4.

La llum absorbida genera un focus de calor que es troba localitzat al mirall d'entrada i té una potència que és sensible a les interferències entre la llum que està entrant i la que està sortint enrere. Les variacions de temperatura dins la cavitat afecten el canvi de fase que experimenta la llum i això, a través de les interferències, provoca canvis en l'absorció que modifiquen al seu torn la temperatura. Observem com aquesta

2. SISTEMES DINÀMICS

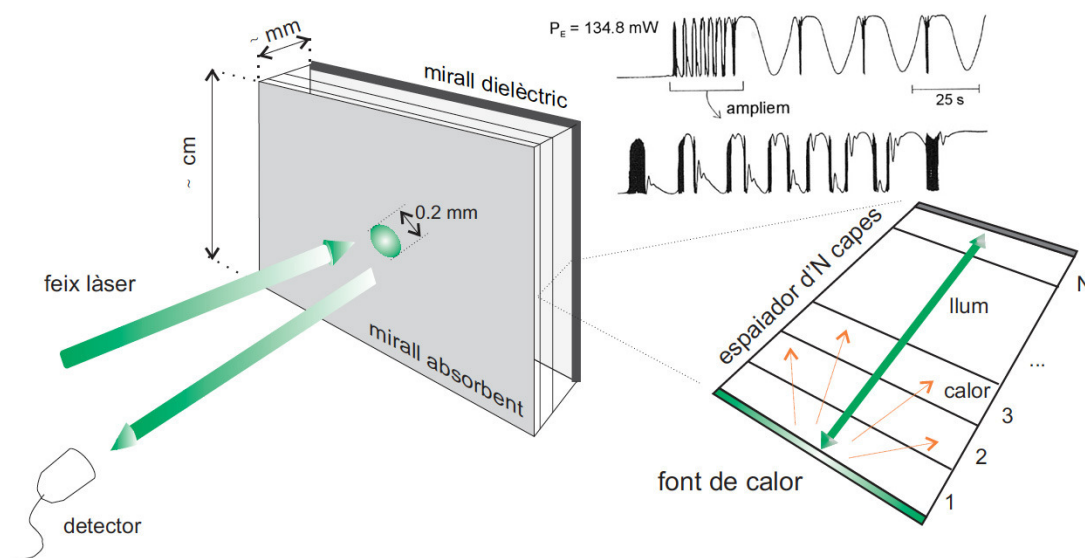


Figura 2.4: Dispositiu BOITAL il·luminat per un feix de llum d'una certa potència mentre un detector mesura la potència de la llum reflectida i ens informa del comportament del sistema. Dins del dispositiu funciona un bucle de realimentació entre l'absorció de llum al mirall d'entrada, la propagació tèrmica, els canvis de camí òptic per variacions de temperatura i les interferències de la llum allà on es produeix l'absorció. La no-linealitat sorgeix de la funció interferomètrica que descriu l'absorció en funció del canvi de fase òptica. En escalfar-se, el vidre s'expandeix mentre que els líquids disminueixen el seu índex de refracció i, per tant, produeixen efectes contraris sobre el camí òptic davant les variacions de temperatura. En un dispositiu es posen capes de materials alternativament contraris. Els efectes de competència entre capes, combinats amb la realimentació no lineal, originen fenòmens dinàmics que poden ser observats a la llum reflectida gràcies a les interferències. Al fons es mostra una evolució temporal de certa complexitat produïda per un dispositiu BOITAL de dimensió sis que presenta fins a cinc freqüències d'oscil·lació.

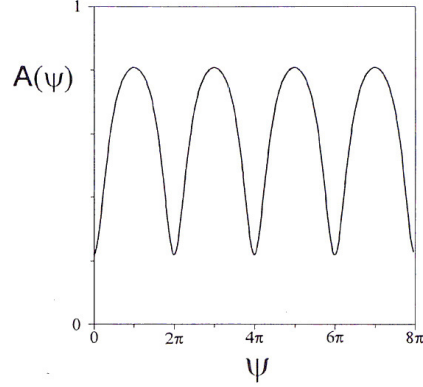


Figura 2.5: Representació de l'absorció que té lloc al mirall d'entrada en funció del canvi de fase que la llum experimenta en donar una volta dins la cavitat òptica. Aquesta funció interferomètrica constitueix la no-linealitat dels sistemes BOITAL i lògicament serà molt més efectiva com més gran sigui el contrast interferencial

cadena de dependències es tanca sobre si mateixa de manera que constitueix un anell de realimentació no lineal. La no-linealitat apareix a la funció interferomètrica que descriu l'absorció de llum i que representem per $A(\Psi)$, on Ψ és el canvi de fase de la llum en viatjar dins la cavitat (vegeu figura 2.5). D'altra banda, com que l'escalfor arriba successivament a les diferents capes de l'espaiador, els efectes termoòptics alternativament contraris dels diversos materials presenten retards temporals i el resultat és l'aparició d'autooscil·lacions en la resposta del sistema. El comportament dels dispositius BOITAL és descrit per l'equació homogènia de difusió de la calor sotmesa a les oportunes condicions de continuïtat i frontera. L'equació dinàmica és

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = D(z) \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \quad (2.17)$$

on $T(z, t)$ representa la distribució de temperatures en funció de la profunditat dins de l'espaiador i en funció del temps, i $D(z)$ descriu la difusibilitat tèrmica en funció del material de les diverses capes. La condició de frontera rellevant és la que té en compte la font de calor a la pel·lícula prima del mirall d'entrada i que es pot escriure com

$$-k \left[\frac{\partial T}{\partial z} \right]_{z=0} = A(\Psi) I_E - h[T]_{z=0} \quad (2.18)$$

on apareixen la conductivitat tèrmica k , la funció interferomètrica $A(\Psi)$ que descriu l'absorció, la intensitat lluminosa incident I_E i un coeficient h , que caracteritza unes

2. SISTEMES DINÀMICS

pèrdues convectives. Finalment hem d'explicitar la influència de la distribució de temperatures sobre la fase òptica Ψ a causa de les variacions en l'índex de refracció tal que

$$\Psi = \frac{4\pi}{\lambda} \int_0^L n(T) dz \quad (2.19)$$

on hem suposat que, per comparació a la propagació tèrmica, la llum travessa instantàniament l'espaiador de manera que l'absorció en un instant donat és determinada per la distribució de temperatures del mateix instant. Fixem-nos en el bucle de realimentació contingut en el conjunt d'aquestes tres equacions. L'equació en derivades parcials és, en aquest cas, lineal però està subjecta a una condició de frontera que és no local, ja que Ψ depèn de la distribució de temperatures, i és no lineal a causa de la $A(\Psi)$. La variable del problema és la funció $T(z, t)$, amb $0 < z < L$, i això fa que, en principi, el sistema matemàtic sigui de dimensió infinita. Ara bé, es pot demostrar que aquest sistema admet una reducció a un sistema d'equacions diferencials ordinàries d'ordre N pràcticament equivalent a l'original des del punt de vista dinàmic. Això ens indica que la dimensió dinàmica efectiva del dispositiu és igual al nombre de capes introduïdes a l'espaiador. El sistema reduït es pot escriure com

$$\frac{d\Psi_j}{dt} = - \sum_{i=1}^N b_{ij} (\Psi_i - a_i A(\Psi) \Psi_E), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2.20)$$

on els coeficients b_{ji} i a_i estan relacionats amb els diversos paràmetres físics del sistema i es compleix que $\sum a_i = 1$. Ψ_E és proporcional a la intensitat incident. Les variables dinàmiques Ψ_j representen els canvis de fase parcials que la llum experimenta en cada una de les diverses capes i són proporcionals a les temperatures mitjanes d'aquestes capes. Així doncs, un sistema BOITAL evoluciona en l'espai de fases de dimensió N definit per les Ψ_j i la família BOITAL viu en un espai de paràmetres entre els quals els més significatius són els gruixos i els coeficients termoòptics de les diverses capes. La resposta observada es caracteritza per la fase total $\Psi = \sum \Psi_j$ que determina la reflexió de l'interferòmetre a través d'una funció $R(\Psi)$, semblant però de sentit contrari a $A(\Psi)$.

Per veure alguns dels fenòmens que es manifesten en la resposta de la família BOITAL (vegeu el capítol 3), s'ha de considerar primer la *solució estacionària* que correspon a la condició d'anul·lar les derivades temporals en les equacions dinàmiques i que normalment consisteix en un o diversos punts fixos situats en determinats llocs de l'espai de fases.

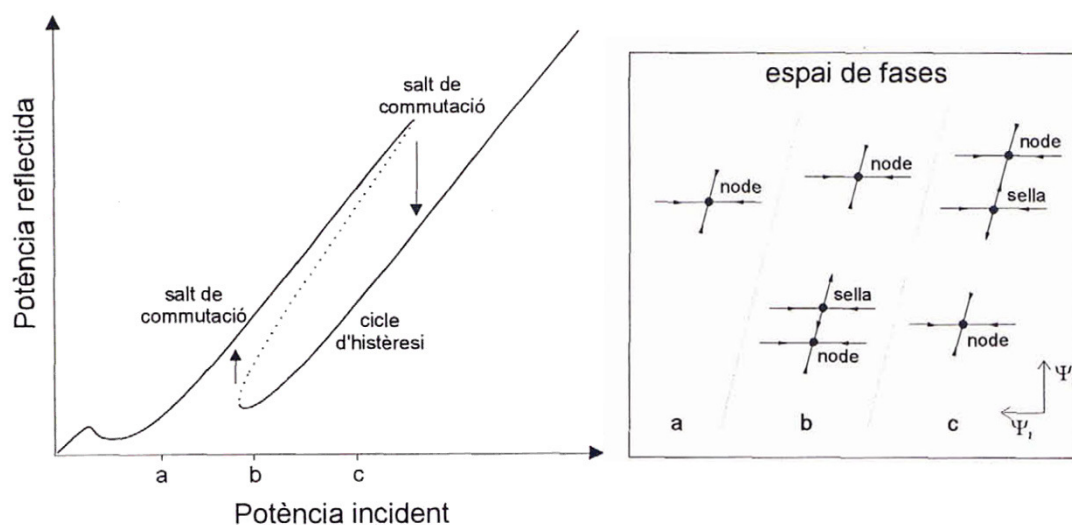


Figura 2.6: Solució estacionària d'un sistema BOITAL amb uns miralls determinats i un espaiador qualsevol amb un nombre arbitrari de capes. Per a un valor donat de la potència incident podem tenir múltiples respostes, cada una d'elles corresponent a una distribució de temperatures autoconsistent amb el bucle de realimentació. La solució de partida correspon a la potència nul·la i les solucions addicionals van apareixent i desapareixent per parelles en bifurcacions del tipus sella-node. Les branques representades en línia contínua descriuen els nodes i en línia discontinua les selles. En variar la potència d'entrada amunt i avall obtenim un cicle d'histèresi delimitat per dos salts de commutació que indiquen la desaparició de l'estat estable on es trobava el sistema. En el requadre dret es mostren els retrats de l'espai de fases per a tres potències incidents determinades i per al cas d'un sistema de dimensió dos

2. SISTEMES DINÀMICS

A la figura 2.6 es mostra com és la solució estacionària en funció de la potència de llum incident per a un sistema BOITAL amb uns miralls determinats. La corba representa la potència reflectida que és igual a la potència incident multiplicada per la reflexió interferomètrica $R(\Psi)$. Si la Ψ romangués fixa tindríem una recta de pendent igual a $R(\Psi)$ i, per tant, el que expressa la gràfica és que la fase òptica va variant en funció de la potència incident. La solució estacionària reproduïx de forma distorsionada la funció no lineal i, si bé no es mostra a la figura 2.6, la gràfica presenta successives ziga-zagues d'acord amb el caràcter periòdic de la funció $A(\Psi)$. Com que aquesta funció només depèn de les propietats dels miralls, resulta que la mateixa solució estacionària correspon a tota la família BOITAL, que, amb uns miralls determinats, tenen un espaiador qualsevol. S'ha de tenir en compte, però, que els punts fixos de la solució estacionària es troben en un espai de fases de dimensió igual al nombre de capes i que aquest podrà variar de sistema a sistema.

Fixem-nos ara en els detalls significatius de la solució estacionària. Una primera cosa a observar és la coexistència de múltiples solucions per a un mateix valor del paràmetre de control. Cada una de les solucions correspon a una distribució de temperatures que determina una fase Ψ , la qual justament fa que hi hagi l'absorció que correspon a la distribució de temperatures en qüestió. El bucle de realimentació i la condició que es tanqui de forma autoconsistent és qui determina que tinguem o no una solució. La no-linealitat de la funció $A(\Psi)$ permet que la condició d'autoconsistència es pugui satisfer per a diversos valors de Ψ i d'aquí ve la multiplicitat de solucions.

Un aspecte a remarcar és l'estabilitat de les diverses solucions i això sí que pot canviar a mesura que creix la dimensió. Quan el sistema és de dimensió u o es comporta com si ho fos, resulta que les diferents branques de la solució estacionària corresponen alternativament a punts node del tot estables i a punts sella amb una dimensió inestable. En els punts estables la realimentació del sistema és negativa, cosa que vol dir que, si per alguna causa el sistema s'allunya una mica del punt fix, la realimentació el fa retornar al mateix punt. Als punts sella, en canvi, la realimentació del sistema és positiva, de manera que, si una pertorbació l'allunya del punt, aquest desplaçament s'amplifica i condueix el sistema vers un dels dos nodes, que serà el de dalt o el de baix segons el sentit de la pertorbació inicial.

Per veure una mica el comportament dinàmic del sistema anem variant el paràmetre de control a fi de recórrer la solució estacionària. Comencem de zero i anem augmentant

la potència incident. Al començament només tenim una solució i és estable, però podem observar com a una certa potència apareixen dues noves possibles solucions. Hi ha hagut un canvi qualitatiu a l'espai de fases: dos punts fixos, un node i una sella, han nascut simultàniament i en el mateix lloc de l'espai de fases a través d'una *bifurcació sella-node*. De moment, però, el sistema segueix la mateixa solució d'abans mentre que les altres dues solucions es van separant entre si. Arriba un moment que la sella s'acosta fins a tocar el node on es troba el sistema i totes dues solucions desapareixen en una nova bifurcació sella-node de sentit contrari a la primera. En esvair-se l'atractor que el retenia, el sistema es troba de sobte dins la conca d'atracció d'un altre punt node i se n'hi va fent el que s'anomena un *salt de commutació*.

Si seguim augmentant el paràmetre de control el sistema seguirà sobre aquest node fins que torni a trobar una bifurcació sella-node i hagi de fer un nou salt de commutació. Si en lloc de seguir augmentant-lo tornem enrere, el sistema es manté en la solució estable en que es troba fins que aquesta desaparegui en la bifurcació corresponent. Aquest moviment d'anada i tornada per sobre de la solució estacionària el sistema ha fet un cicle d'hysteresis definit per dues bifurcacions sella-node que han produït dos salts de commutació. Aquest tipus de comportament és el que s'observa en la resposta d'un dispositiu BOITAL amb un espaiador unipola.

2.7 Bifurcació de Hopf

El pas d'un comportament estacionari a un d'oscil·latori té lloc mitjançant l'anomenada bifurcació de Hopf, que és un fenomen que afecta dues dimensions del punt fix (vegeu figura 2.7). En variar el paràmetre de control el node estable primer es transforma en focus i després s'instabilitza, mentre que al seu voltant hi apareix un nou tipus de solució atractiva: una òrbita periòdica o cicle límit. La inestabilitat bidimensional del punt fix s'ha produït perquè la competència entre els dos graus de llibertat permet un efecte de realimentació positiva que amplifica les petites fluctuacions. El flux emergeix del focus inestable però, a mesura que s'allunya, tendeix a ser frenat pel creixement dels efectes no lineals i el resultat és un nou atractor en forma de corba tancada on el sistema dóna voltes periòdicament. Aquesta corba o cicle límit correspon a dos graus de llibertat que han entrat en oscil·lació periòdica amb la mateixa freqüència però amb un cert desfasament mutu. La freqüència d'oscil·lació és determinada pels mecanismes de

2. SISTEMES DINÀMICS

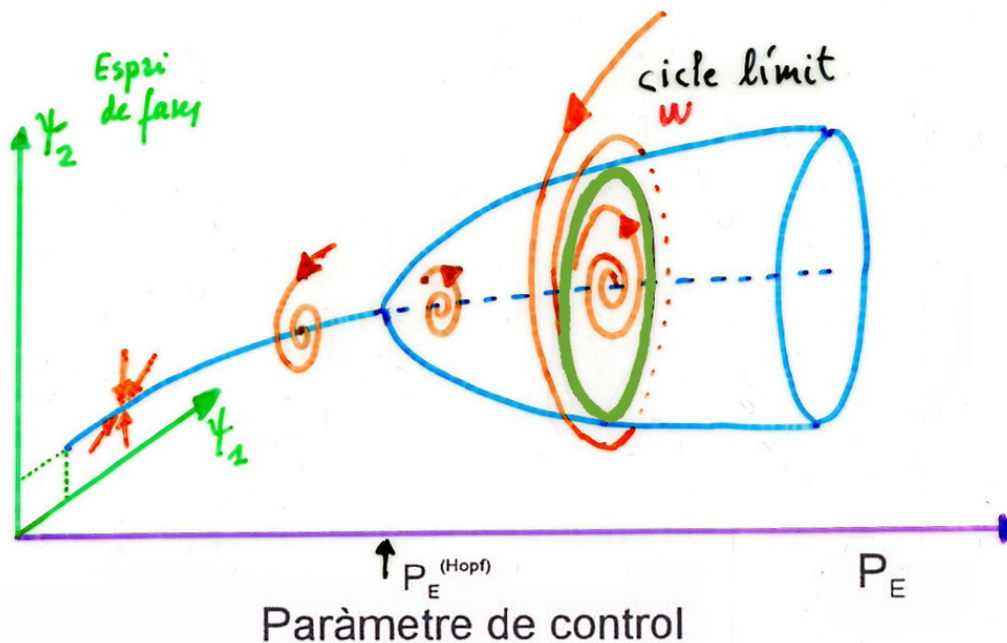


Figura 2.7: Il·lustració del fenomen de la bifurcació de Hopf. Hem representat esquemàticament els canvis qualitatius que es produeixen en un espai de fases bidimensional en funció del paràmetre de control. Un node estable es converteix en focus i la convergència del flux en espiral es va fent cada vegada més lenta. A la bifurcació de Hopf, el flux en espiral passa de convergent a divergent, el focus s'ha fet inestable i un nou tipus d'atractor s'ha format al seu voltant per recollir el flux emergent. Ha nascut un cicle límit que descriu una evolució temporal periòdica de les dues variables amb un cert desfasament entre elles. En aquest estat el sistema es manté en oscil·lació autosostinguda gràcies a la realimentació no lineal i als efectes de competència entre els dos graus de llibertat.

la dinàmica interna i s'ha de remarcar que el sistema va oscil·lant tot i que el paràmetre de control es romanguí constant.

L'amplitud de l'oscil·lació i, per tant, del cicle límit és al principi petita però pot créixer notablement a mesura que ens allunyem de la bifurcació. Això ens recorda el que va succeir el 7 de novembre de 1940 amb el pont sobre el riu de Tacoma Narrows, el qual va entrar en oscil·lació de tipus torsional sota l'acció d'un vent i va acabar ensorrant-se. Aquest fet a vegades s'ha atribuït erròniament a una ressonància forçada induïda a través d'un vent oscil·lant fictici. Però de fet tot sembla indicar que es va produir una bifurcació de Hopf amb la mala sort que l'amplitud de l'oscil·lació va superar la resistència de l'estructura. L'exemple ens permet remarcar la diferència entre

la bifurcació de Hopf i la ressonància d'un oscil·lador forçat.

Les propietats de qualsevol fenomen dinàmic són generals i, a la pràctica, podem prescindir completament dels detalls concrets del sistema que estiguem estudiant.

La bifurcació de Hopf d'un punt estable és un fenomen que implica necessàriament que el punt en qüestió participi també en una bifurcació sella-node. Això vol dir que l'òrbita periòdica té o tindrà un punt sella en les seves proximitats.

2.8 Bifurcació Homoclínica

La figura 2.8 il·lustra el cas d'un sistema de dimensió tres. Recordem que un punt sella té una varietat invariant atractiva o d'entrada i una repulsiva o de sortida. Aquestes varietats són corbes que van modificant-se en canviar el paràmetre de control. Abans de produir-se el contacte, la varietat repulsiva de la sella va a morir al cicle límit i la varietat atractiva fa de separatriu entre la conca d'atracció del cicle límit i la d'un altre atractor situat en un altre lloc de l'espai de fases. En el moment just d'entrar en contacte, la varietat atractiva i la repulsiva coincideixen una amb l'altra i ambdues es confonen amb el propi cicle límit, i constitueixen el que s'anomena *òrbita homoclínica*. El període de l'òrbita ha anat augmentant en apropar-se a la sella i acaba fent-se infinit en el moment de la connexió homoclínica. Això és degut a l'efecte ralentitzador del punt fix ja que tant l'arribada com la sortida del punt són asimptòtiques en el temps. Duent el paràmetre de control més enllà de la connexió homoclínica el que tenim és la desaparició del cicle límit i, ara, totes les trajectòries que surten del focus inestable escapen cap a l'altre atractor de més amunt. Ha succeït un nou tipus de bifurcació que ha afectat una zona extensa de l'espai de fases i, en particular, ha destruït una òrbita periòdica fent-li el període infinit. Es parla d'una *bifurcació homoclínica*.

Aquest exemple presenta òrbites estrictament periòdiques tal com passa per sistemes de dimensió dos, ara bé, en el següent capítol veurem un exemple de bifurcació homoclíniques que presentarà caos cap al final de la seva evolució (vegeu la figura 3.4). El fet essencial és que quan la sella s'acosta a la connexió homoclínica es produeix un flux que circula de forma recurrent a prop seu. És a dir, hi ha un conjunt de trajectòries que passen a la vora de la sella, s'allunyen i tornen a acostar-s'hi tot seguint les varietats invariants d'aquesta.

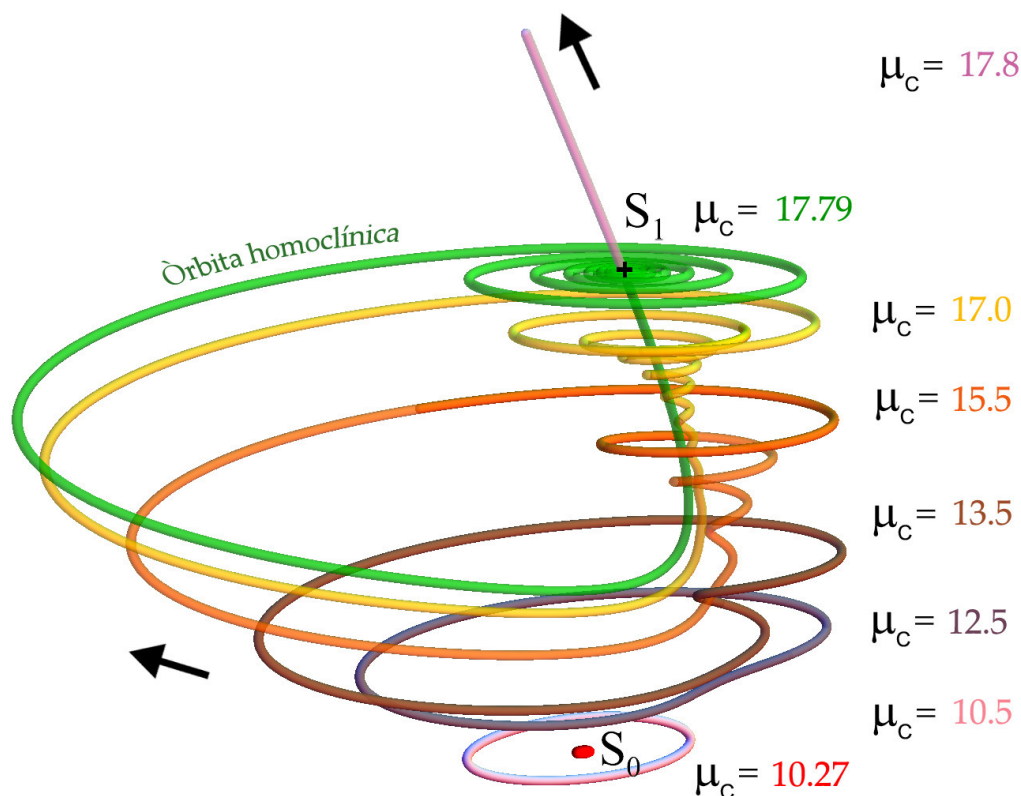


Figura 2.8: Il·lustració del fenomen de bifurcació homoclínica. Per $\mu_c \leq 10.27$ el node d'una parella sella-node és un focus atractiu. A $\mu_c = 10.27$ el focus esdevé inestable i fa una bifurcació de Hopf, generant un cicle límit que va creixent ($\mu_c = 10.5, 12.5, 13.5, 15.5, 17.0$) i es va acostant a la sella S_1 . Finalment, per $\mu_c = 17.79$ El cicle límit entra en contacte amb la sella S_1 i, alhora, les seves varietats invariantes es connecten entre si i es confonen amb el cicle límit de color verd. L'òrbita periòdica s'ha convertit en homoclínica i el període s'ha fet infinit perquè el pas pel punt sella és doblement asimptòtic. Si seguim augmentant el paràmetre de control μ_c el cicle límit desapareix i les varietats invariantes de la sella s'han creuat. I per aquella regió de l'espai ja no hi ha cap atractor i el flux se'n va cap amunt a l'altra banda de la sella buscant altres atractors superiors.

També és important saber que la bifurcació homoclínica és un fenomen lligat a la bifurcació de Hopf, i ambdós a la bifurcació sella-node. De fet, el conjunt de les bifurcacions que pugui arribar a fer la família d'un sistema dinàmic forma una estructura ben lligada a l'espai de paràmetres. És com un trencaclosques amb diferents nivells que mai s'arriba a resoldre completament.

2.9 Tipus de bifurcacions

Per tancar aquesta aproximació a la teoria dels sistemes dinàmics fem una breu classificació de les bifurcacions en funció del tipus d'inestabilitat implicat.

N'hi ha de dos tipus. *Bifurcacions locals*, associades a canvis en l'estabilitat dels atractors, i *bifurcacions globals*, associades a canvis globals en l'estructura topològica de l'espai de fases.

2.9.1 Bifurcacions Locals

Les bifurcacions locals fan referència a les bifurcacions que es donen en punts fixos de l'espai de les fases. Es consideren locals, perquè el seu estudi es redueix a l'estudi de les propietats locals del punt fix. Aquestes bifurcacions estan associades a un canvi local en l'estabilitat del punt fix.

Algunes bifurcacions locals destacades són:

**Bifurcacions sella node*: en aquest cas, en anar variant el paràmetre de control, un node (punt fix estable) i una sella (punt fix no estable) es van apropant fins que coincideixen, lloc en el que els dos punts desapareixen a l'espai de fases.

**Bifurcació de Hopf*: tal com hem vist a l'apartat anterior en aquesta bifurcació un punt fix, que inicialment és un focus estable, canvia la seva estabilitat convertint-se en un focus inestable. Aquesta bifurcació també implica l'aparició, en el punt de la bifurcació, d'una òrbita periòdica. Hi han dos tipus de bifurcació de Hopf, supercrítica o normal i subcrítica. Aquesta distinció depèn de l'estabilitat del cicle límit que apareix arran de la bifurcació. En el primer cas el cicle límit és estable i en el segon cas és no estable (òrbita sella).

**Bifurcacions transcrítiques*: Es produeixen en fusionar-se un punt sella amb un node, intercanviant-se l'estabilitat; en aquest cas, a diferència de la bifurcació sella node, els dos punts no desapareixen, sinó que el punt sella esdevé un node i viceversa.

2. SISTEMES DINÀMICS

**Bifurcació en forquilla:* un punt fix node estable, en variar el paràmetre de control, perd la seva estabilitat, i es converteix en un punt fix sella. En el punt de bifurcació apareixen dos nous punts fixos. Aquesta bifurcació també pot ser supercrítica o subcrítica en dependència de l'estabilitat dels dos nous punts fixos; si són dos nodes estables la bifurcació és supercrítica i si són dos punts selles llavors la bifurcació és subcrítica.

**Bifurcacions sella-node d'òrbites periòdiques:* en aquest cas dues òrbites periòdiques, una d'estable i una de no estable, es fusionen en variar el paràmetre de control i desapareixen.

**Desdoblament de període:* en aquesta bifurcació una òrbita periòdica estable es transforma en una òrbita periòdica sella. A més a més, en el punt de bifurcació apareix una nova òrbita periòdica de període doble al de l'anterior. Aquesta bifurcació és supercrítica quan aquesta nova òrbita de període doble és estable, en canvi, si la nova òrbita periòdica és sella, la bifurcació és subcrítica.

**Bifurcació de Hopf de segon ordre:* En aquest cas una òrbita periòdica estable, esdevé inestable en variar el paràmetre de control. En el punt de bifurcació apareix una nova òrbita quasiperiòdica. L'estabilitat d'aquesta nova solució quasiperiòdica determina si la bifurcació ha estat supercrítica (solució quasiperiòdica estable) o subcrítica (solució quasiperiòdica no estable o sella).

2.9.2 Bifurcacions Globals

Es pot produir un canvi topològic de l'espai de fases en variar el paràmetre de control sense que hi hagi hagut cap canvi en l'estabilitat dels punts fixos. En aquest cas, no podem fer un estudi local de la bifurcació en cap punt fix, ja que cap no ha patit un canvi significatiu de la seva estabilitat. En general, podem dir que les bifurcacions globals són aquelles on es produeix un canvi qualitatiu en l'estructura de les òrbites en una extensa regió de l'espai de fases. Exemples típics de bifurcacions globals són les homoclíniques i les heteroclíniques que, com hem vist, impliquen la destrucció dels atractors implicats. En aquests casos, en el punt de la bifurcació, ens apareix una òrbita homoclínica o heteroclínica en funció del tipus de bifurcació. En general les bifurcacions globals solen anar acompanyades de fenòmens asimptòtics que faciliten la seva caracterització, per exemple una òrbita homoclínica és biasimptòtica en l'arribada i sortida del punt fix sella.

Les bifurcacions globals són especialment interessants perquè poden venir acompanyades d'una rica dinàmica i donar respostes caòtiques. Per exemple en sistemes de dimensió superior o igual a tres les bifurcacions homoclíniques estan associades amb el caos de Shilnikov, fig.3.4. Com veurem en el següent capítol aquests fenòmens globals, juntament amb els dos mecanismes de barreja no lineal d'oscil·lacions que descriurem, són fonamentals per entendre i generar comportaments dinàmics complexos.



Figura 2.9: Resum dels oscil·ladors dinàmics més estudiats (5), que representen la geografia del mapa dinàmic conegut. A continuació ens endinsarem per les portes que els dispositius BOITAL han obert, podent accedir així a un escenari dinàmic encara més ric.

3

Escenari de Landau Generalitzat

En aquest últim capítol toquem la qüestió de fins a quin punt pot fer-se complexa la resposta d'un sistema dinàmic si considerem dimensions cada cop més elevades. Volem saber quantes freqüències diferents pot arribar a exhibir l'evolució temporal d'un sistema de dimensió N i quin tipus de senyals poden resultar de la combinació no lineal de les oscil·lacions a les diferents freqüències o modes.

La qüestió, de fins a quantes freqüències poden arribar a aparèixer a l'evolució temporal d'un sistema dinàmic N -dimensional sembla bàsica i simple però encara no existeix una resposta àmpliament acceptada. Segons el punt de vista lineal predominant dels físics, el nombre de modes d'oscil·lació que N graus de llibertat pot sostenir sembla estar limitat a només $N/2$, és a dir, a només els modes normals de la mecànica teòrica. En un món lineal cada mode necessita dos graus de llibertat i cada grau de llibertat només pot funcionar un sol cop.

Per altra banda, en el context de la dinàmica no lineal, el caos sovint fa pensar amb la possibilitat de disposar d'un nombre il·limitat de modes degut a que l'espectre de Fourier d'un senyal amb caos és continu. Però el cert és que les components de Fourier d'un senyal temporal no necessàriament representen les freqüències característiques del sistema ja que, quan parlem de freqüències diferents no pensem en l'espectre de Fourier d'un senyal que per alguna raó ha deixat de ser harmònic o fins i tot periòdic, sinó en oscil·lacions intrínsecament diferents. Oscil·lacions associades a diferents graus de llibertat del sistema, que sorgeixen de forma autònoma unes de les altres però que, quan adquireixen una mica d'amplitud, són acoblades pels mecanismes no lineals i originen senyals d'estructura complexa.

3. ESCENARI DE LANDAU GENERALITZAT

Així doncs, quins són els mecanismes a través dels quals un sistema dinàmic pot incorporar modes d'oscil·lació addicionals? O encara millor, com són aquests mecanismes capaços de combinar moltes oscil·lacions i produir evolucions temporals tan complexes com els senyals emesos pels dispositius BOITAL?

La teoria de bifurcacions suggereix que l'únic camí per introduir freqüències característiques a la dinàmica temporal és a través de diverses inestabilitats oscil·latòries bidimensionals, i.e., la bifurcació de Poincaré-Andronov-Hopf d'un punt fix, la bifurcació de Neimark-Sacker o bifurcació secundària de Hopf d'un cicle límit, i les successives bifurcacions que originen tors invariants d'ordre elevat.

Altres processos de bifurcació que involucren òrbites periòdiques, com el desdoblament de període, sella-nodes cíclics o bifurcacions heteroclíniques, no contenen mecanismes (bidimensionals) intrínsecs per la formació de noves freqüències, i s'han de veure més com a productors de transformacions o destruccions i no tan com a creadors de freqüències d'oscil·lació característiques.

El nostre problema està clarament relacionat amb el mecanisme físic suggerit per Landau per tal d'explicar l'emergència de la turbulència en fluids mitjançant una seqüència d'inestabilitats oscil·latòries que es van produint a mesura que el nombre de Reynolds s'incrementa, vegeu l'apartat 3.3.

La seqüència de Landau correspondria a la bifurcació de Hopf d'un punt fix que viu en un espai de fases N -dimensional, vegeu la figura 3.1, seguit per una sèrie de bifurcacions secundàries que generen tors invariant de dimensió successivament superior fins a un màxim de $N/2$. Recordem que un tor és un objecte nascut d'un cicle límit que s'ha inestabilitzat i ha experimentat una segona bifurcació de Hopf en un pla transversal al sentit del cicle. Un tor necessita, per tant, un espai de fases de dimensió tres, com a mínim, i expressa que el sistema està evolucionant amb dues freqüències d'oscil·lació.

Si les dues freqüències són commensurables (el seu quocient és racional), l'atractor no és el tor, sinó una corba tancada que està a sobre la superfície del tor i l'oscil·lació és periòdica amb període igual al mínim comú múltiple dels dos períodes combinats. Si les dues freqüències són incommensurables, aquesta corba no es tanca mai sobre si mateixa i acaba omplint tota la superfície del tor, de manera que en aquest cas sí que podem dir que el tor és l'atractor. L'òrbita que dona voltes al tor sense tancar-se correspon al que se'n diu una oscil·lació quasiperiòdica. Els tors poden presentar formes diverses i, a més a més, a mesura que augmenta la dimensió del sistema són

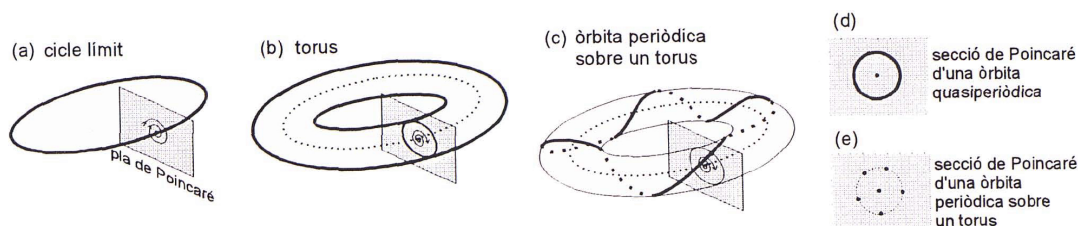


Figura 3.1: Il·lustració d'una bifurcació de Hopf sobre un cicle límit, que provoca el naixement d'un tor. En una secció de Poincaré el fenomen és equivalent a la bifurcació de Hopf d'un punt fix. L'evolució del sistema damunt del tor és una oscil·lació associada a dues freqüències. Si el quocient entre aquestes freqüències és un nombre racional, la trajectòria es tanca sobre si mateixa i constitueix una òrbita periòdica i a la secció de Poincaré apareixen un nombre discret de punts d'intersecció. Si les dues freqüències són incommensurables tenim una òrbita quasiperiòdica que no arriba mai a tancar-se i omple de forma densa tota la superfície del tor. En aquest cas la secció de Poincaré mostrarà una corba contínua i tancada, com si fos un cicle límit.

possibles tors multidimensionals que contenen òrbites basades en un nombre superior de freqüències.

Els tors són molt corrents en els sistemes conservatius, però en presència de dissipació la situació és diferent. Per exemple, l'observació d'un torus-2 constitueix un fenomen relativament rar i quan es produeix acostuma a ser en sistemes de dimensió quatre com a mínim. Aquest és el cas que es mostra a la figura 3.2 i que correspon a la resposta d'un dispositiu BOITAL amb quatre materials dins de la cavitat. Així doncs, els tors són escàpols i difícils d'observar en els sistemes dissipatius i no serveixen de substrat per generar oscil·lacions amb moltes freqüències involucrades.

D'altra banda, a partir de consideracions topològiques, es fa evident que per espais de N dimensions poden arribar a contenir fins a tors d'ordre $(N - 1)$, i que la teoria de bifurcacions proporciona mecanismes per produir tals tors en sistemes dinàmics. Val la pena però, fer notar que aquests tors semblen encara més delicats que aquells relacionats amb les bifurcacions de Hopf d'un punt fix. En aquest sentit trobem raons per concloure que l'aparició de modes oscil·lació en un sistema dinàmic dissipatiu està associada a la capacitat dels seus punts fixos per produir bifurcacions de Hopf i que la coexistència de punts fixos podria ser el primer pas cap a la producció de comportaments oscil·latoris complexos.

Ara veurem que hi ha una forma més bàsica per generar senyals dinàmics amb

3. ESCENARI DE LANDAU GENERALITZAT

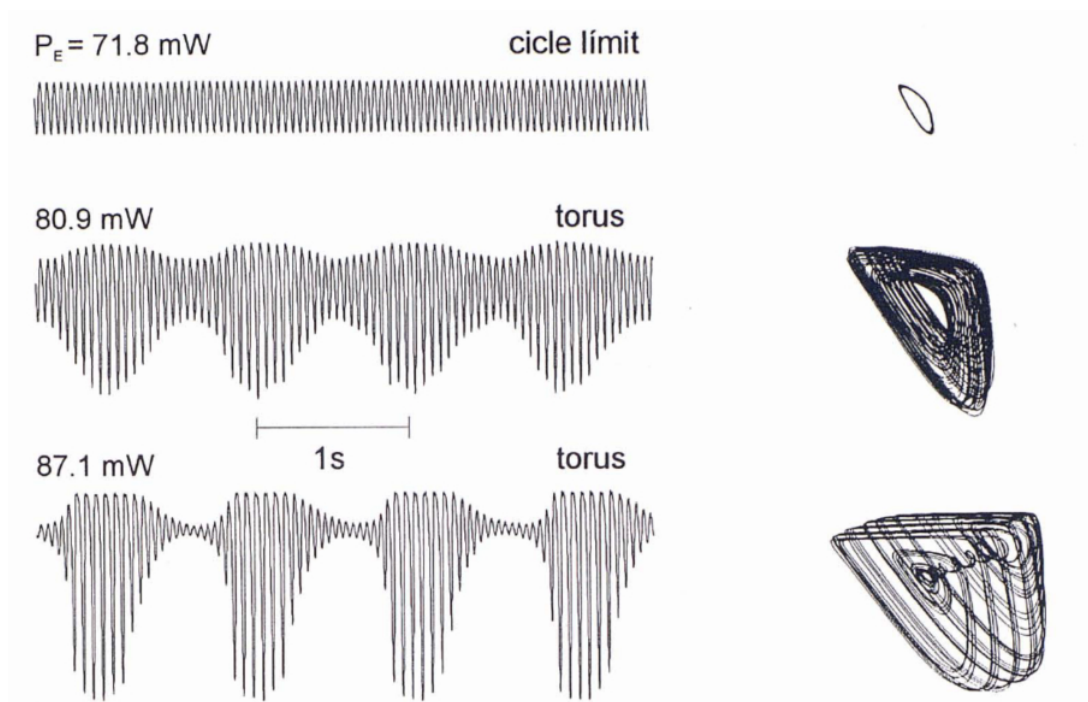


Figura 3.2: Evolucions temporals que mostren com una oscil·lació periòdica esdevé quasi-periòdica a través d'una bifurcació de Hopf que genera una segona oscil·lació més lenta que la inicial. També es mostren els atractors corresponents obtinguts en un símil de l'espai de fases amb la tècnica de representar el mateix senyal però amb retards successius sobre tres eixos ortogonals. Els registres descriuen la resposta d'un dispositiu BOITAL quatricapa (vidre, gel òptic, vidre i oli de gira-sol amb gruixos de 140, 35, 400 i 350 μm) per a tres potències incidents diferents.

múltiples freqüències. Considerem una parella de punts fixos, una sella i un node, que han sorgit d'una bifurcació sella-node en un espai de fases de dimensió N . El node en principi és estable en totes les direccions mentre que el punt sella té només una direcció inestable que el connecta amb el node. De dues en dues, les direccions estables es poden anar inestabilitzant en diferents bifurcacions de Hopf i d'aquesta manera els dos punts en conjunt poden arribar a experimentar fins a $N - 1$ bifurcacions. És a dir, als voltants dels punts fixos es van formant, per a diferents valors dels paràmetres, uns fluxos en forma d'espiral helicoidal que donen lloc primer a un comportament tipus focus convergent i després a un cicle límit que sorgeix del punt. Cada un d'aquests processos es produeix en un pla de diferent orientació a l'espai de fases i genera una freqüència d'oscil·lació diferent. La majoria dels cicles límit són inestables, de fet, són

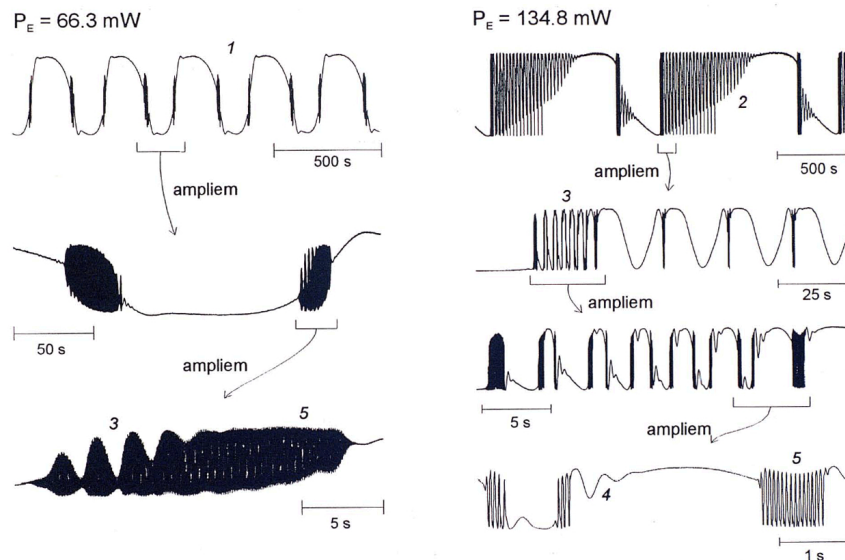


Figura 3.3: Dues evolucions temporals de certa complexitat observades en la resposta d'un dispositiu BOITAL de dimensió sis. Aquests senyals formen part d'una sèrie per a diferents potències incidents que mostra un procés d'aparició de les cinc freqüències d'oscil·lació del sistema. El cas de l'esquerra correspon a una potència a la qual només s'observen tres freqüències. Totes provenen del node, i l'atractor que estem observant és encara lluny de la sella. En augmentar la potència incident, l'atractor s'apropa a la sella i manifesta la seva influència en les dues freqüències addicionals que es poden apreciar en el cas de la dreta. En aquest cas la sella encara no ha fet cap bifurcació de Hopf però conté dues espirals helicoidals atractives que són responsables de les oscil·lacions. Les freqüències de la sella tenen valors intermedis a les del node i totes estan identificades sobre els registres amb uns números que expressen l'ordre de petita a gran. Noteu que el període més llarg és unes 16.000 vegades el període més curt. Si el període ràpid fos un dia, la seqüència d'oscil·lacions tornaria a començar de nou al cap de 45 anys.

selles, i no s'observen directament però, en canvi, sí que manifesten la seva influència sobre el cicle límit estable que puguem estar observant. A més a més, si la dimensió ho permet, també es poden formar tors a partir dels cicles límit, però s'ha de remarcar que les freqüències generades seran les mateixes que les dels punts fixos.

El que acabem de dir de forma tan genèrica ens ho il·lustren els senyals de la figura 3.3. En un espai tridimensional no poden manifestar-se més de dues freqüències, l'una associada al node i l'altra a la sella, ja que els plans de les dues bifurcacions de Hopf cobreixen tot l'espai. En un espai de dimensió sis el punt node com a màxim podrà inestabilitzar-se en tres plans diferents i podrà originar fins a tres freqüències. El punt

3. ESCENARI DE LANDAU GENERALITZAT

sella només ho podrà fer en dos plans, ja que d'entrada ja té una direcció inestable. En total el sistema podrà exhibir fins a cinc freqüències diferents en la seva evolució temporal. No cal que ens fixem gaire en els detalls, ni tampoc en el fet que els senyals de la banda dreta de la figura 3.3 siguin aperiòdics. El que ara ens interessa destacar és que tenim una evolució determinista amb un cert grau de complexitat. La repetitivitat estructural del senyal expressa clarament que el sistema està evolucionant sota el control dels seus mecanismes interns, és a dir, de forma determinista. El grau de complexitat és difícil de quantificar però el podem posar en evidència fent-nos la pregunta de què dirien els que estan escodrinyant els confins de l'univers si detectessin senyals com els de la figura 3.3 provinents d'una galàxia llunyana¹.

3.1 Barreja no lineal de modes d'oscil·lació

Així doncs, contràriament a la creença predominant, el moviment quasiperiòdic no representa el camí exclusiu per combinar oscil·lacions en sistemes dissipatius no lineals. Hi ha un altre tipus de mecanisme de barreja que, en presència de dissipació, sembla ser més robust i potser fins i tot més bàsic que la creació de tors invariant.

Aquest mecanisme està basat l'entrellaçament dels moviments oscil·latoris que sorgeixen en determinades regions de l'espai de fases associades amb les bifurcacions de Hopf d'un o més d'un punts fixos; i no requereix necessàriament la creació de conjunts límits de dimensió successivament més alta.

Com hem vist, aquesta barreja es fa evident en l'evolució temporal dels senyals en forma de ràfegues intermitents de diferents modes d'oscil·lació, combinat-se uns amb els altres en funció de la seva escala. La causa de tot plegat és deguda a que el conjunt atractiu s'estén cap a les regions corresponents de l'espai de fases, vegeu (18) i (19).

En el món real, un exemple ben conegut d'aquest tipus de barreja de modes el trobem en l'activitat de dispar de certes classes de neurones. Aquesta barreja correspon a un comportament dinàmic genèric per als sistemes de dimensió tres o superior que es produeix quan un cicle límit estable comença a créixer sota variacions dels paràmetres de control cap a un cicle límit sella orientat transversalment, convertint-se així en un atractor de tipus Shilnikov, com els dos que es mostren a la figura 3.4.

¹De fet, s'han detectat senyals de raigs-X amb oscil·lacions complexes emeses per discs d'acreció que han deixat bocabadats als astrofísics, els quals no hi han trobat encara una explicació (23).

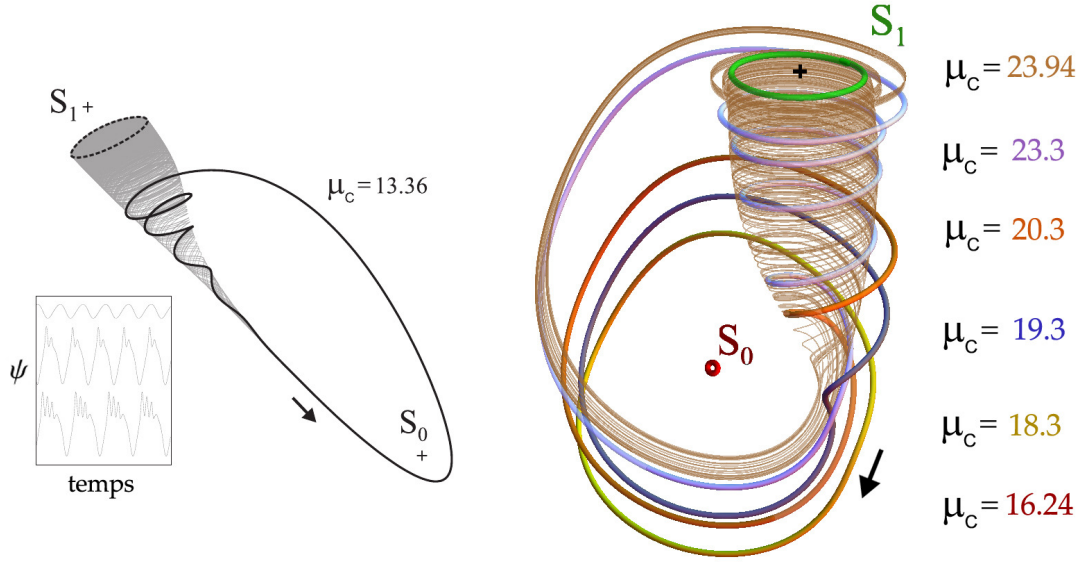


Figura 3.4: Representació dels resultats numèrics per dos sistemes $N = 3$ a l'espai de fases on s'il·lustra la barreja no lineal de dos modes d'oscil·lació sorgits d'una parella sella-node de punts fixs. A l'esquerra la bifurcació de Hopf es produeix per $\mu_C=12.96$ a la sella S_1 i per 13.10 al node S_0 . Es fa evident com l'òrbita estable va creixent a l'augmentar μ_C tot incorporant girs helicoidals al voltant de la varietat inestable (color gris) del cicle sella (guionets), sense fer cap bifurcació i mantenint-se estrictament periòdica. Al costat es mostren les evolucions temporals de la variable ψ per tres paràmetres de control diferents: just després de fer la bifurcació, un valor intermedi i pel cas de l'atractor representat. A la dreta s'han representat diverses òrbites per una parella sella-node diferent però amb el mateix mecanisme de barreja. Cal dir que un cop sobrepassat el valor de $\mu_C=12.96$ les òrbites comencen a fer desdoblaments de període i poden arribar a presentar òrbites irregulars característiques del caos. L'òrbita marró està a punt de fer la connexió homoclínica amb la sella cicle (color verd) després d'haver fet tota una cadena de desdoblament de període fins fer-se aperiòdica.

3. ESCENARI DE LANDAU GENERALITZAT

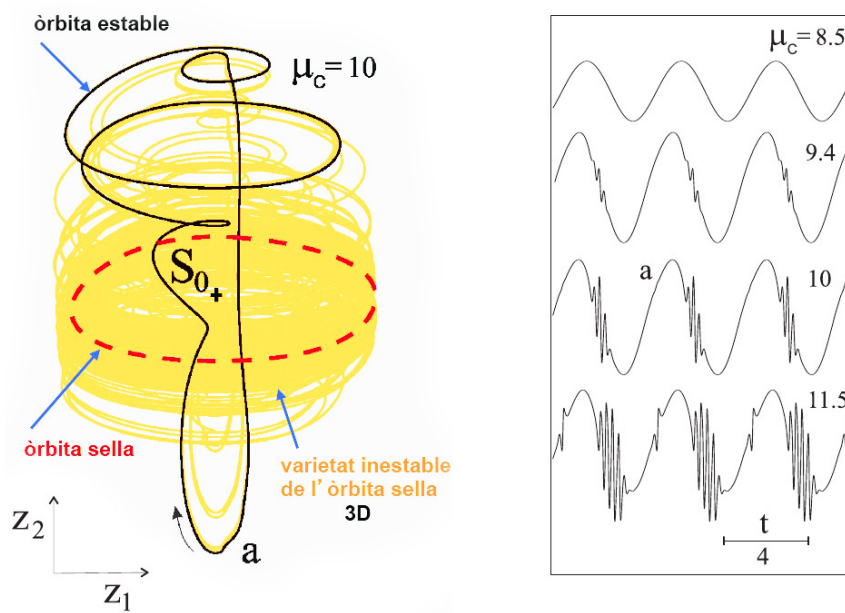


Figura 3.5: Resultats numèrics per $N = 4$ il·lustrant com sorgeixen dos modes d'oscil·lació en successives bifurcacions de Hopf del mateix punt fix barrejat en una bifurcació tipus tor. La bifurcació de Hopf es produeix per $\mu_C = 8.2$ i 9.1 amb freqüències angulars de 1.41 i 25 , respectivament. L'òrbita estable (color negre) creix amb μ_C tot incorporant girs helicoidals al voltant de la varietat inestable tridimensional (color groc) del cicle sella (guionets vermells), sense fer cap bifurcació fins arribar a $\mu_C = 12$, a on hi apareix el desdoblament de període. L'etiqueta a marca el lloc on apareixerà una segona estructura helicoidal. La varietat inestable és representada a través d'unes poques trajectòries per facilitar-ne la seva visualització. El cicle sella fa una bifurcació tor subcrítica per $\mu_C = 10.3$ amb una freqüència secundària de 1.38 i esdevé estable a la sella tor. Al costat es mostren les evolucions temporals de la variable ψ per òrbites estables amb diferents paràmetres de control.

3.1 Barreja no lineal de modes d'oscil·lació

L'evolució temporal d'aquests atractors reflecteix la barreja no lineal de modes d'oscil·lació associats amb les bifurcacions de Hopf d'una parella sella-node connectada (formada per dos punts fixos diferents, un d'estable i un d'inestable). És important destacar que la incorporació intermitent d'oscil·lacions en la freqüència de la sella no requereix necessàriament fer cap bifurcació de l'òrbita estable, tal com es mostra a la figura 3.4.

Menys conegut és el tipus de barreja no lineal que es mostra a la fig.3.5, en la qual un punt fix, inicialment estable, ha experimentat dues bifurcacions de Hopf successives i el segon mode d'oscil·lació (de major freqüència) s'incorpora localment en el primer cicle límit que segueix estrictament periòdic.

Aquí de nou, la incorporació de modes de la barreja té lloc a través de l'entrellaçament amb la varietat inestable del segon cicle límit, sense necessitat de fer cap bifurcació, però ara les oscil·lacions ràpides apareixen en dos llocs diferents del primer cicle.

Una altra diferència significativa és que el període de l'òrbita estable no canvia amb la incorporació d'oscil·lacions ràpides, mentre que a la figura 3.4 el període augmenta clarament. L'augment del període denota la presència d'un procés homoclínic quan els modes barrejats sorgeixen de diferents punts fixos, o pel contrari l'absència d'aquest quan els seus modes emergeixen des del mateix punt fix.

Finalment, els dos tipus de barreja de modes apareixen diferenciats en la variable representada, ψ , pel fet que en un tipus les oscil·lacions ràpides emergeixen a la part superior (o abaix, segons la posició relativa de la sella), mentre que en l'altre emergeixen a nivells intermedis de l'ondulació oscil·latòria. Totes aquestes característiques s'han de tenir en compte alhora d'analitzar oscil·lacions més complexes, perquè la barreja simultània d'un nombre d'oscil·lacions sorgides d'una parella sella-node de punts fixos serà bàsicament una combinació d'aquests dos mecanismes de barreja no lineal.

La figura 3.6 il·lustra l'espectacular dinàmica d'un sistema de dimensió 5 on s'hi pot veure l'entrellaçament no lineal de quatre modes d'oscil·lació de freqüències clarament diferenciades. El sistema de la figura 3.6 és capaç d'explotar completament totes les seves possibilitats oscil·latòries ja que, recordem-ho, una parella sella-node de punts fixos pot mantenir fins a $N - 1$ bifurcacions de Hopf diferents en un espai de fases de dimensió N . Al anar incrementant els paràmetres, sorgeixen $N - 1$ cicles límit o estan a punt de sorgir i també es poden arribar a crear alguns tors invariants. El núvol dels

3. ESCENARI DE LANDAU GENERALITZAT

conjunts límit conté un atractor i una col·lecció de selles amb la propietat comuna de tenir una branca de la seva varietat inestable anant a parar a l'atractor.

També hi poden tenir lloc altres processos secundaris complexos, però aquests dos mecanismes en constitueixen la base per obtenir barreges no lineals amb característiques genèriques. En essència, com hem vist pels senyals dels dispositius BOITAL, tenim un atractor que incorpora moviments helicoidals locals relacionats amb la influència de selles veïnes i, d'aquesta manera, la dinàmica temporal observada esdevé complexa tot repetint el seu comportament de manera recurrent. Consulteu els detalls a la llegenda de la figura 3.6. Per distingir correctament els dos mecanismes bàsics de la barreja de modes cal fer notar aquí que, els modes 1 i 3 corresponen al node del punt fix, mentre que els modes 2 i 4 corresponen al punt sella.

Les propietats de barrejar modes sorgits del mateix punt fix s'aprecia clarament en la incorporació del mode 3 en el mode 1 i del mode 4 en el mode 2. Les característiques de la barreja entre diferents punts fixos es veuen en la incorporació del mode 2 en el mode 1 i del mode 4 al mode 3. El cas del mode 4 és significatiu perquè apareix a través dels dos mecanismes en el mateix atractor, mostrant-nos així la riquesa dels processos barreja de modes. En primer lloc, el fet que la incorporació del mode 4 al mode 2 es manifesti en el mode 1, i.e., l'atractor, indica el funcionament efectiu d'una cadena de transmissió d'influències. Aquesta transmissió d'influències de modes també està implicada en com es presenta la incorporació del mode 4 en el mode 3 a l'atractor però, a més a més, en aquest cas, suggereix també l'aparició de processos homoclíncics que involucren cicles límit secundaris sorgits de la parella sella-node de punts fixos.

En el cas de freqüències clarament diferents, com les de la fig. 3.6, la regularitat bàsica associada amb la freqüència característica més baixa, sovint apareix pràcticament periòdica, independentment de l'estructura complexa de l'òrbita. Aquest fet marca una clara distinció respecte al caos. D'altra banda, l'activitat intermitent de la resta de modes d'oscil·lació implica la manca d'aferrament de freqüències ("frequency locking") i problemes de ressonància derivats. Això explica la formidable estabilitat de l'ona amb múltiples tirabuixons. Una altra diferència a remarcar d'aquest senyal respecte al moviment quasiperiòdic és que no es pot expressar com una superposició lineal de modes d'oscil·lació combinats. En altres paraules, l'espectre de Fourier no reflecteix directament l'estructura de les freqüències característiques del senyal perquè la combinació de modes intermitents és estrictament no lineal.

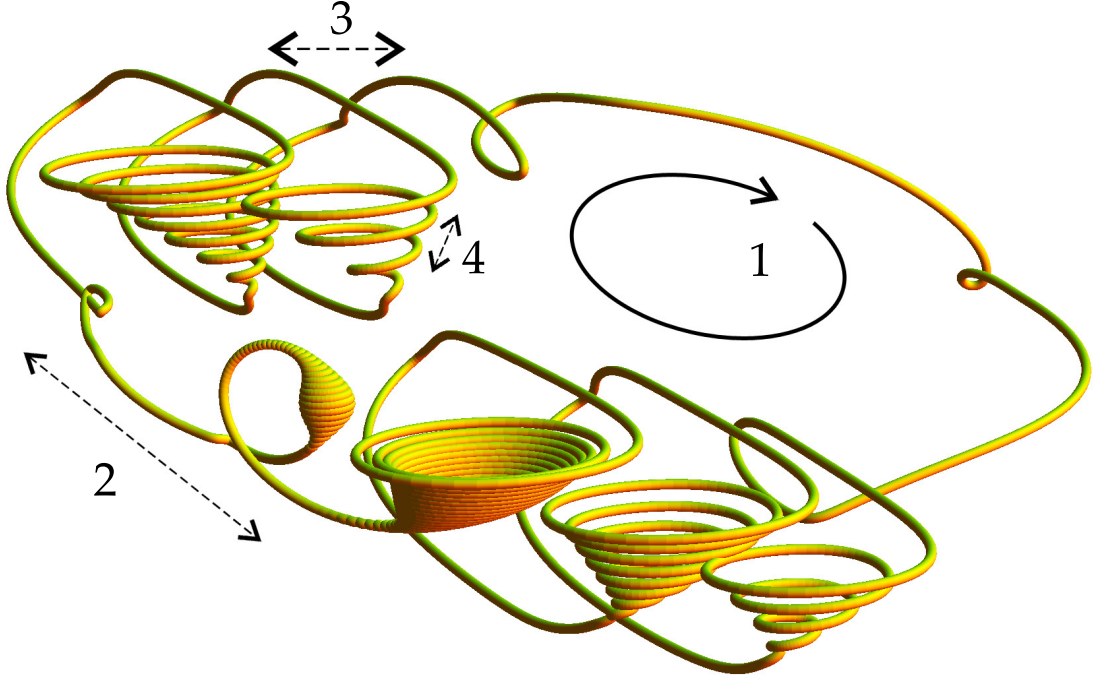


Figura 3.6: Projecció tridimensional de l'òrbita d'un sistema dinàmic de dimensió 5 que mostra la barreja no lineal de quatre modes d'oscil·lació. El sistema d'equacions (3.2)-(3.4) ha sigut dissenyat (vegeu el subapartat 3.2.2) imposant bifurcacions de Hopf amb freqüències angulars de 0.04, 0.25, 2, i 20, alternativament per una parella sella-node de punts fixos en funció dels valors de p igual a -6, 15.6, -7.4, i 16.2, i escollint $c_1 = 250$. La funció no lineal emprada és $g(\psi) = (1.25 - 1.06 \cos \psi) / (1.68 - \cos \psi)$, les bifurcacions de Hopf en la parella sella-node involucrada passen per a $\mu_C = 38.5, 53.5, 40.0$, i 54.8 , respectivament. Les etiquetes numèriques denoten diferents modes ordenats de més petit a més gran. Els nombres imparells corresponen al node i els nombres parells a la sella. S'han descartat més de 200 cicles previs en la representació de l'òrbita per assegurar-se la seva aproximació al comportament asimptòtic. Els modes d'oscil·lació apareixen a l'òrbita encara que les seves bifurcacions de Hopf tinguin lloc per valors més grans de μ_C , suggerint la seva subcriticalitat. El punt de vista de l'òrbita ha estat acuradament seleccionat per facilitar-ne la seva interpretació.

3. ESCENARI DE LANDAU GENERALITZAT

Ara, per tal d'analitzar com podria ser el mecanisme de barreja de modes generalitzat, tractarem d'imaginar sistemes dinàmics amb grans matrius de punts fixos potencialment capaços d'explotar les seves possibilitats oscil·latòries. Davant d'aquesta situació convé que ens formulem tres preguntes: quina mena de matrius de punts fixos hi ha, quantes bifurcacions de Hopf diferents poden sostenir cada punt fix, i en quina mesura els modes d'oscil·lació es poden barrejar entre si.

3.2 Sistemes N-dimensionals amb un camp vectorial no lineal multidireccional

Una descripció molt general i útil per analitzar les possibilitats d'emergència de dinàmica complexa d'un sistema N -dimensional és la següent:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \sum_{j=1}^m b_j f_j(x, \mu), \quad (3.1)$$

on $x \in \mathbb{R}^N$ és el vector d'estat, A és una constata matricial $N \times N$, b_j són vectors constants de dimensió N , f_j són funcions no lineals escalars en x , μ descriu paràmetres constants involucrats en la funció no lineal, i les $m \leq N$ components $b_j f_j$ s'assumeixen com a linealment independents.

El detall més rellevant per al nostre propòsit és que la multi-direccionalitat de la part no lineal del camp vectorial determina l'estructura topològica dels conjunts potencials de punts fixos a l'espai de fases. A través d'una transformació lineal a una base adequada incloent els vectors b_j es pot observar que, en general, els punts d'equilibri han d'estar contingut dins d'un subespai lineal m -dimensional determinat pels b_j i A . Amb consideracions genèriques i assumint funcions no lineals suficientment eficaces, podem imaginar escenaris com els mostrats en la figura 3.7, on punts fixos m -dimensionals han aparegut a través de bifurcacions tipus sella-nodes orientades de diferent manera i, ocasionalment, a través de bifurcacions de forquilla. Cada node estable té la conca d'atracció definida per les varietats estables dels punts sella circumdants i, suposant matrius completes, que tenen un conjunt de $3^m - 1$ punts sella sobre la separatriu (vegeu els detalls de l'Apèndix (a) de l'article que estem introduint, (20) o (4)).

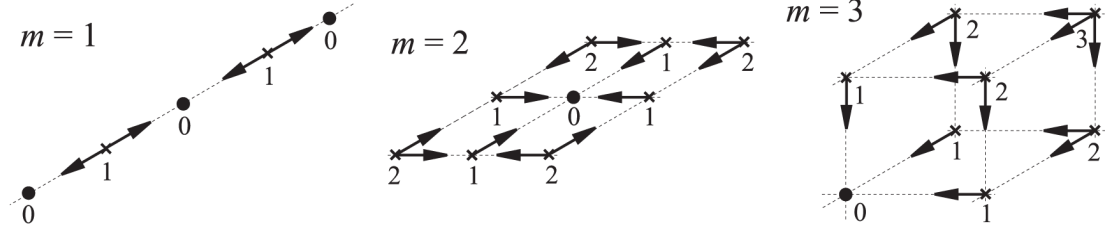


Figura 3.7: Distribucions de punts fixos amb subespais lineals m -dimensionals de l'espai de fases per sistemes N -dimensionals que tenen no-linealitats efectives en m components linealment independents del camp vectorial. Els índex numèrics denoten dimensions de varietats inestables dels punts d'equilibri al suposar atractius, per raons físiques, els subespais externs m -dimensionals. S'han dibuixat matrius de punts regulars per simplicitat però tan la distància de la separatriu com la seva posició alineada als punts d'equilibri és irregular en els subespais lineals. Només s'ha representat una conca d'atracció per $m = 2$ i una sola cantonada per $m = 3$. En general, la matriu de punts s'estén més enllà de la separatriu amb atractors addicionals.

3.2.1 Escenari de Landau generalitzat

Finalment hem arribat a la nostra destinació, ara ja estem en condicions per aixecar el cap i veure l'escenari de Landau generalitzat. Si impossem que la matriu formada per un node atractiu i el conjunt total de les selles es trobi sobre la línia de separació de la conca d'atracció. La primera bifurcació de Hopf del node estable probablement produirà un cicle límit estable, mentre que les bifurcacions successives d'aquest punt fix i les bifurcacions dels punts sella produeixen cicles límit sella de diferents tipus, però tots ells tenen una branca de la seva varietat inestable que va a parar al cicle atractiu. Hi apareixeran segurament processos molt complexos però assumim com a característica genèrica la presència d'un atractor i una matriu de selles límit dins d'una estructura connectora de varietats invariants relacionades amb les de la matriu inicial de punts fixos. Així doncs, segons la nostra interpretació, s'assoleixen les possibilitats òptimes per la barreja de modes sobre l'atractor mitjançant només bifurcacions de Hopf interiors a la varietat estable dels punts fixos, mentre que les seves varietats invariants inicialment inestables no participen alhora de conservar el camí de influència cap a l'atractor.

Els dibuixos esquemàtics de la figura 3.8 il·lustren com l'atractor emergeix des del node estable i pot rebre la influència de les selles sella-node connectades. L'etiqueta

3. ESCENARI DE LANDAU GENERALITZAT

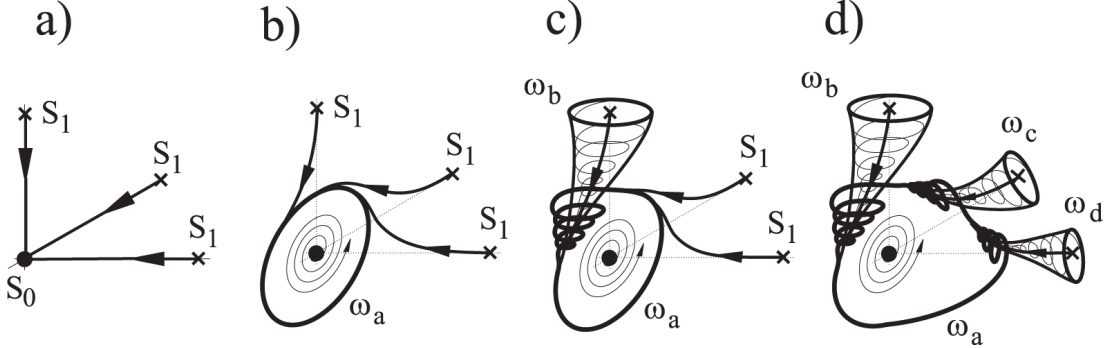


Figura 3.8: Barreja no lineal de modes d'oscil·lació d'un conjunt de punts sella S_1 connectats a un punt node S_0 determinat. L'esquema mostra com esdevenen incorporats a l'òrbita estable de S_0 els primers modes d'oscil·lació sorgits de diferents punts S_1 . A l'espai de fases N -dimensional, successives bifurcacions de Hopf en dimensions estable de S_0 produiran barreges de modes addicionals a zones particulars de l'òrbita estable, i passarà el mateix per successives bifurcacions de Hopf en les dimensions estables dels punts S_1 (no representats a la figura).

S_q s'utilitza per indicar punts fixos amb varietat inestable de dimensió q abans de fer qualsevol bifurcació de Hopf, tot i que per simplicitat després de l'aparició de les bifurcacions l'etiqueta s'ha mantingut igual. Per tant, la situació de la fig. 3.8 descriu la influència de les selles del tipus S_1 a l'atractor sorgit de S_0 .

Així doncs, podem imaginar trajectòries tan complexes com vulguem per descriure evolucions temporals de sistemes amb molts graus de llibertat que vindran determinades per les condicions que regulen aquest escenari dinàmic que anomenem *l'entrellat del món* dels sistemes dinàmics. Aquest entrellat es troba en les varietats invariants de les selles, en les seves possibilitats d'entortolligament, i en les restriccions topològiques que les condicionen.

Per tant, els avantatges principals a destacar són:

- * L'escenari és escalable sense límit definit, i té dues vies de creixement: N i m .
- * Es desenvolupa mitjançant processos de *codimensió 1*; això el fa viable a la pràctica.
- * No es coneix cap alternativa en dinàmica no lineal.

3.2.2 Sistemes N-dimensionals amb un camp vectorial no lineal unidireccional

El sistema (3.1) amb $m = 1$ pot ser transformat¹ a una forma canònica basada amb la matriu acompanyant d'aquesta manera

$$\frac{dz_1}{dt} = - \sum_{j=1}^N c_j z_j + f_1(z_1, z_2, \dots, z_N, \mu), \quad (3.2a)$$

$$\frac{dz_j}{dt} = z_{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, N, \quad (3.2b)$$

els seus punts d'equilibri apareixen localitzats a l'eix z_N . En absència de bifurcacions de Hopf, la matriu unidireccional consisteix en una seqüència alternada de punts fixos excepte per un en les seves dimensions de la varietat inestable i, en particular, estem interessats en seqüències de punts S_0 i S_1 , i.e., volem estabilitat fora de la línia de les connexions sella-node per tal de garantir la presència genèrica d'un atractor abans i després de les bifurcacions de Hopf. En aquest cas, les varietats estables de la parella $S_0 - S_1$ poden presentar fins a $(N - 1)$ bifurcacions diferents.

Per tal d'aconseguir sistemes capaços de presentar el comportament d'inestabilitat completa, considerem funcions no lineals d'una sola variable de la forma

$$f_1(z_1, z_2, \dots, z_N, \mu) = \mu_C g(\psi, \mu), \quad (3.3)$$

amb

$$\psi = \sum_{j=1}^N d_j z_j, \quad (3.4)$$

on μ_C es escollit com a paràmetre de control. Aquest tipus de funció ens permet dividir el disseny del sistema en dos problemes separats: l'existència de punts fixos i l'aparició de bifurcacions de Hopf sobre aquests punts. De fet, encara que pugui resultar estrany, l'anàlisi d'estabilitat lineal dels punts fixos de les famílies de sistemes en la forma (3.2)-(3.4) es poden fer implícitament sense especificar la funció no lineal i, per tant, sense conèixer els punts fixos corresponents. Això és així perquè la influència de la funció no lineal a la matriu Jacobiana d'un punt fix ve donada completament pels valors corresponents del paràmetre auxiliar.

$$p = \mu_C \frac{\partial g}{\partial \psi}. \quad (3.5)$$

¹Si el rang de $(b_1, Ab_1, A^2b_1, \dots, A^{N-1}b_1)$ és igual a N .

3. ESCENARI DE LANDAU GENERALITZAT

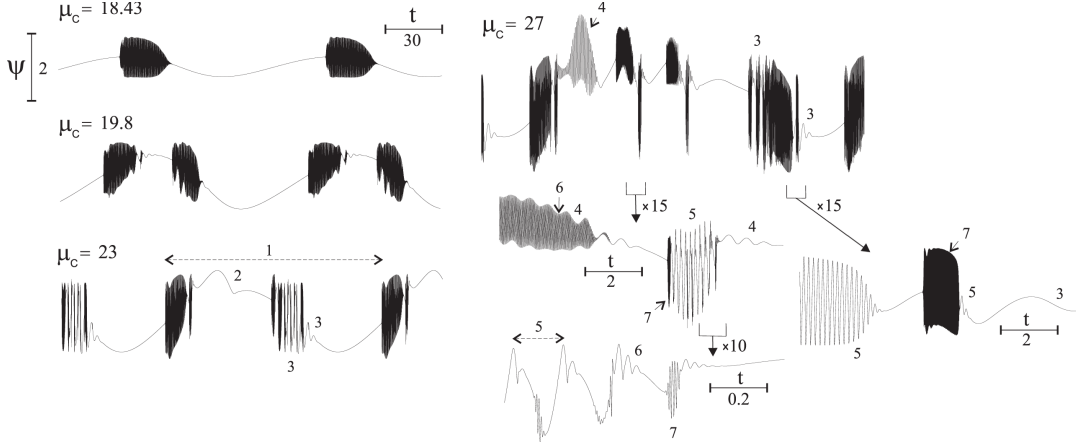


Figura 3.9: Evolucions numèriques temporals que mostren la barreja no lineal gradual de 7 modes d'oscil·lació al anar augmentant μ_C , per un sistema de $N = 8$ dissenyat imposant bifurcacions de Hopf amb frèquències angulars de 0.06, 0.3, 2, 10, 40, 200, i 800 a els seus respectius valors de p iguals a -6, 7, -7, 8, -6.5, 9, i -7, els quals corresponen alternadament als punts node i sella, i escollint $c_1=1000$. La funció no lineal és la mateixa que per la Fig. 3.6. Aquests quatre senyals són pràcticament periòdics.

Amb aquest procediment som capaços d'obtenir sistemes N -dimensionals que posseeixen parelles de sella-node de punts fixos experimentant fins a $N - 1$ bifurcacions de Hopf i que exhibeixen normalment tots aquests modes d'oscil·lació intermitentment combinats en l'evolució temporal dels atractors sorgits dels punts node. En el procés, els diversos punts fixos experimenten successives bifurcacions de Hopf fins exhaurir les seves varietats estables. Automàticament hi té lloc una barreja molt eficient de frèquències característiques d'oscil·lació tan pels punts del node com pels de la sella. Tot això passa perquè, independentment de N , l'atractor sorgit d'un node creix amb μ_C cap a les selles veïnes i els cicles sella. Així doncs, el tercer element necessari per una barreja eficient de modes, i.e., l'acostament cap a la homoclinicitat, sembla funcionar automàticament pel cas dels sistemes (3.2)-(3.4) designats a satisfer l'aparició de bifurcacions de Hopf i la possessió de punts fixos.

L'avantatge de la utilització de funcions no lineals d'una sola variable en la forma de les Eqs. (3.3) i (3.4) no representa cap pèrdua de generalitat excepte pel fet que els diferents punts S_0 de la matriu experimenten idèntiques bifurcacions de Hopf en el règim lineal, i el mateix passa pels punts S_1 .

Arribats a aquest punt val la pena recordar que, tots aquests ingredients han sigut

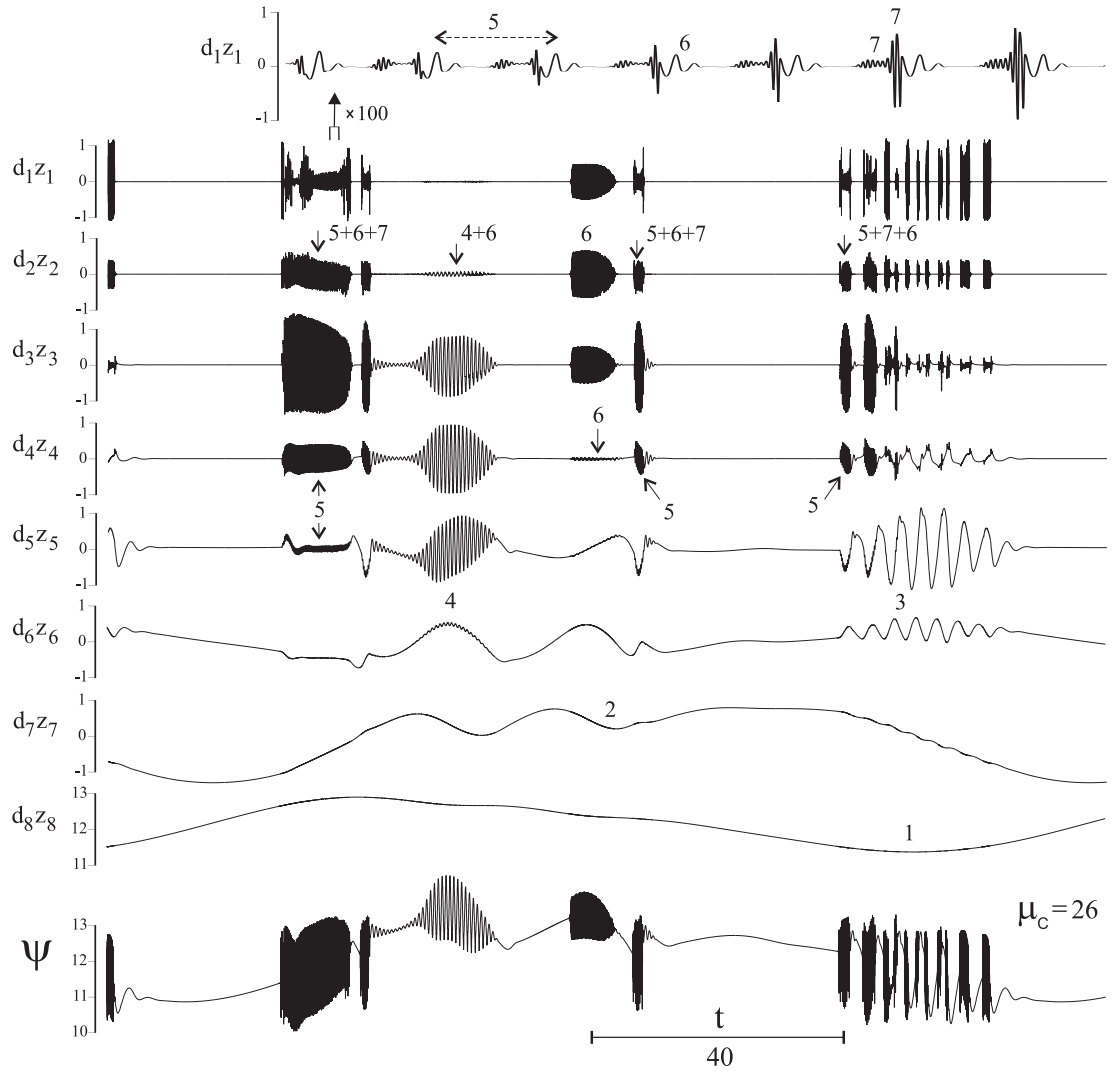


Figura 3.10: El mateix sistema que a la fig. 3.9 però per $\mu_c=26$ i afegint-hi l'evolució temporal de vuit variables del sistema en forma canònica Eqs.(3.2)-(3.4). Els coeficients d_q inclouen un signe alternativament oposat com a funció de q que, a més de l'escala, s'hauria de tenir en compte quan s'intenta apreciar la relació de la derivada temporal entre les variables successives.

3. ESCENARI DE LANDAU GENERALITZAT

implementats en dispositius BOITAL de fins a dimensió $N = 6$, vegeu l'apartat 2.6 i la figura 3.3. Aquests dispositius corresponen a un món unidimensional en el sentit físic de l'espai. És a dir, tenen l'activitat dinàmica associada a la propagació tèrmica en la direcció perpendicular als miralls i, en canvi, les dimensions transversals no hi tenen cap paper. Però ara imaginem-nos un dispositiu il·luminat per un conjunt de feixos paral·lels de llum que generen una matriu de sistemes semblants acoblats per la difusió tèrmica o, més en general, suposem que il·luminem uniformement una secció àmplia del dispositiu en lloc de focalitzar el feix de llum. Aquest sistema formarà part dels anomenats, sistemes extensos, ja siguin discrets o continus, on els efectes transversals combinats amb els longitudinals poden donar lloc a fenòmens de dinàmica espaciotemporal. En aquesta problemàtica destaquen la formació de patrons i els comportaments col·lectius i també, com veurem a continuació, els efectes de turbulència.

3.3 La Turbulència dins dels sistemes dinàmics

"Grasping the nature of life is like catching a whirling eddy in a stream: the moment you have it in your hands it disappears and leaves you with the matter but not the form." Ricard Solé i Brian Goodwin (24)

Aquesta analogia posa de relleu la complexitat de la turbulència, voler-ne copsar els seu delicat i volàtil funcionament es fa extremadament difícil. La turbulència és el gran problema no resolt de la física clàssica. L'origen de la turbulència, ja sigui en fluids i en les equacions de Navier-Stokes, o en altres equacions en derivades parcials més simples, és un problema que s'hi estan dedicant esforços des de molts punts de vista. La figura 3.11 il·lustra la connexió de la mecànica de fluids amb el nostre punt de vista, els sistemes dinàmics. La crua realitat és que hi ha un buit conceptual força gran entre el que els estudis en dinàmica han aconseguit per un reduït rang de sistemes caòtics de baixa dimensió, i el que seria necessari aconseguir per sistemes grans i turbulents. En aquest sentit, tot ens fa pensar que l'escenari de Landau generalitzat ha aconseguit travessar aquest buit conceptual, deixant-nos en una situació privilegiada amb possibilitats sorprenents.

En particular, potser creiem tenir un camí relacionat amb l'origen de la turbulència, un camí que condueixi a la turbulència dins de la teoria dels sistemes dinàmics.

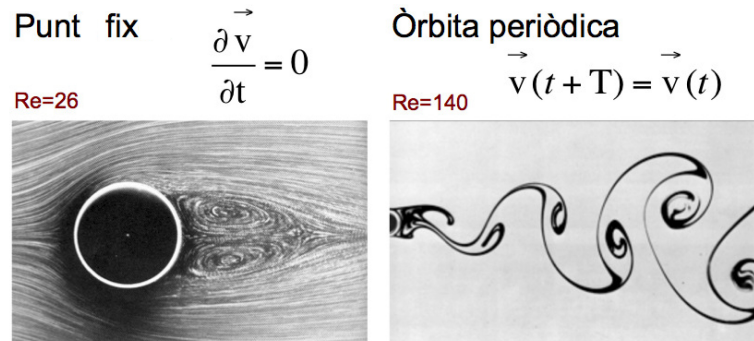


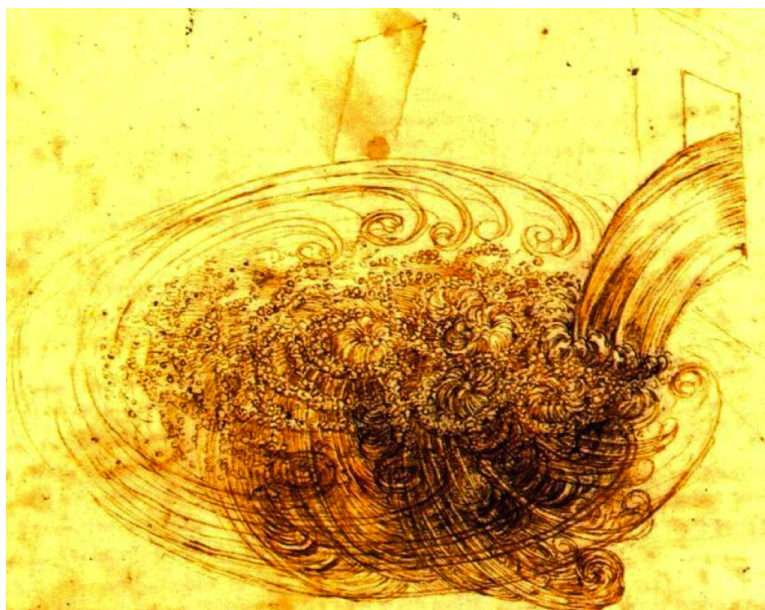
Figura 3.11: Remolins a l'estela d'un cilindre (esquerra) i canal de vòrtex de von Kármán produït pel mateix cilindre. Analitzant el sistema dinàmic associat al camp de velocitats, tenim que, en el primer cas per 26 Reynolds, el sistema està en equilibri dinàmic i correspon a un punt fix en l'espai de fases, i en el segon cas per 140 Reynolds, el sistema ja es troba oscil·lant i ens indica que ha tingut lloc bifurcació de Hopf obtenint una òrbita periòdica a l'espai de fases. Cal remarcar que la freqüència característica és la de l'ona de propagació i no pas la freqüència de gir dels vòrtexs, com erròniament es podria pensar.

Una de les primeres persones que va estudiar la turbulència en profunditat va ser Leonardo da Vinci¹. Molt més tard, al segle XIX, la turbulència va cridar l'atenció de von Helmholtz, lord Kelvin, lord Rayleigh, Reynolds i molts altres científics menys coneguts que van realitzar importants estudis. No obstant, la turbulència va continuar essent un camp poc actiu ja que era molt difícil obtenir resultats satisfactoris.

Landau i, poc més tard, Hopf van postular ara fa més de cinquanta anys que una manera d'arribar a respostes amb característiques pròpies de la turbulència podia ser a través d'una cadena indefinida de bifurcacions que d'un punt fix duguessin a tors de dimensions successivament més elevades amb moltes freqüències diferents d'oscil·lació. Aquesta idea va ser abandonada al llarg dels anys setanta perquè, com ja hem dit, en els sistemes dissipatius els tors són objectes molt fràgils. I durant un cert temps es van veure molts punts en comú entre el caos i la turbulència. Aquest fet va significar un retrocés per al desenvolupament de les intuïcions de Hopf sobre la barreja d'oscil·lacions; i no ha sigut fins als últims anys que les seves idees s'han començat a

¹Leonardo va realitzar nombrosos dibuixos sistemàtics dels moviments dels fluids turbulents per diferents situacions. Va estudiar en gran detall el flux d'aigua canalitzada, salts d'aigua, vegeu la figura 3.12, la força d'erosió, els remolins produïts per diversos obstacles, i moltes més situacions que podem trobar representades en els seus blocs de notes que per mala sort no van arribar mai a ser publicats en forma de llibre, i ens hem de quedar amb les ganes de saber com aquests estudis podrien haver canviat el curs de la història de la ciència.

3. ESCENARI DE LANDAU GENERALITZAT



Leonardo da Vinci (1513)

Figura 3.12: Dibuix de Leonardo d'un flux turbulent amb remolins dins de remolins que posen de manifest la rica estructura dinàmica del sistema.

recuperar. Un col·lectiu d'investigadors ha explotat les seves visions per fer exploracions sistemàtiques de solucions numèriques de sistemes reduïts com el Pla de Couette o el flux d'una canonada. A través de diversos mètodes sofisticats han aconseguit caçar estructures dinàmiques que viuen a l'espai de fases del sistema turbulent en estudi. Els resultats obtinguts durant l'última dècada han sigut molt encoratjadors¹ i estan canviant la nostra manera de veure el fenomen de la turbulència. A la figura 3.13 es fa patent la barreja no lineal i la cadena d'influncies entre diferents cicles límit, confirmant així que el sistema del Pla de Couette està desenvolupant un escenari de Landau generalitzat. Tot sembla indicar que l'equació de Navier-Stokes, amb les seves condicions de frontera, forma sistemes dinàmics excel·lents, capços de desenvolupar escenaris de Landau generalitzats i explotant totes les seves possibilitats d'oscil·lació. Evidentment, tot queda sobre conjectures, i haurem d'esperar a futurs estudis per veure si l'escenari realment funciona. El que està clar però, és que si no és l'entrellat de l'escenari oscil·latòri de Landau serà l'entrellat d'un altre escenari dinàmic.

¹Entre d'altres, hi destaquen els treballs de Predrag Cvitanović i els seus col·laboradors(25)(26)(27)(28)(29), i Schmiegell (30).

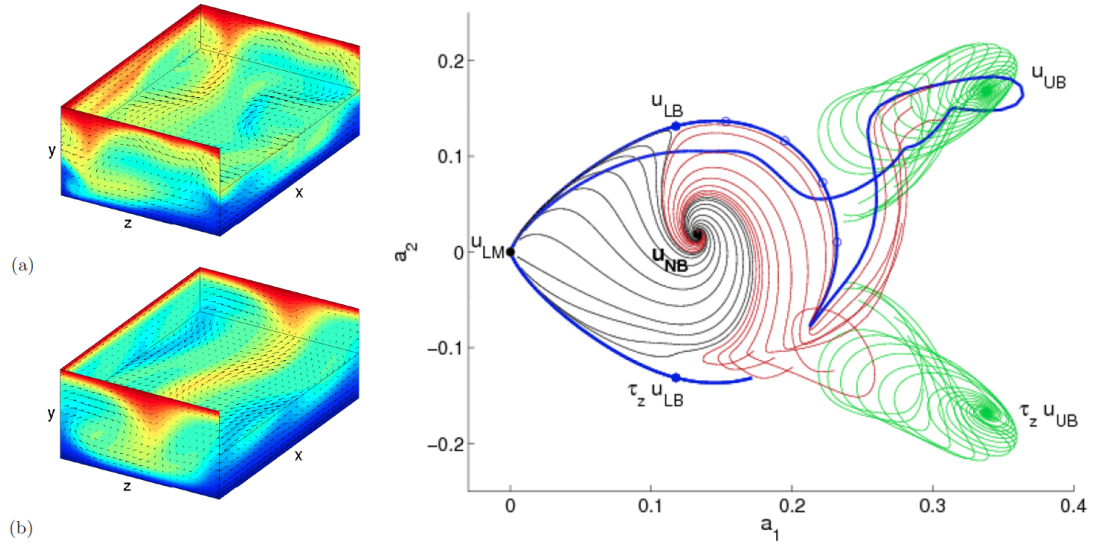


Figura 3.13: Retrat de l'espai de fases del flux turbulent del pla de Couette per $Re = 400$ i $[L_x, L_y, L_z] = [2\pi/1.14, 2, 4\pi/5]$, projectat des d'un espai de 61 506 dimensions a 2. Els punts etiquetats són solucions exactes d'equilibri (*estacionàries*) de l'equació de Navier-Stokes $\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta u$; les trajectòries són integracions numèriques completes de Navier-Stokes projectades al pla (e_1, e_2) . De color blau es mostra una varietat inestable de dimensió 1, en vermell i negre la varietat que sorgeix del punt d'equilibri u_{NB} i en verd una varietat inestable de dimensió 2. El pla de la projecció ve definit en termes de les solucions d'equilibri, i és *dinàmicament invariant* e independent a la representació numèrica. A l'esquerra, s'hi representen dos instants d'una simulació iniciada amb una pertorbació aleatòria del camp de velocitats (u, v, w) d'una cel·la periòdica del pla de Couette. Els instants han estat seleccionats per mostrar (a) mínima i (b) màxima organització en el camp turbulent. Vegeu l'article (25).

3. ESCENARI DE LANDAU GENERALITZAT

Conclusions

El concepte *d'entrellat del món* és molt antic, i està associat amb la idea del determinisme causal. El futur, l'evolució temporal d'un sistema, ve determinat per les interrelacions dinàmiques existents entre les seves propietats. Aquestes interrelacions dinàmiques són de naturalesa física, exclusivament, però els comportaments que en resulten venen regulats i restringits per l'entrellat de l'escenari dinàmic.

Al llarg d'aquest treball hem vist la gran utilitat d'unificar els sistemes del món real sota el marc teòric dels sistemes dinàmics, on sovint, diversos sistemes de naturalesa ben diferent presenten dinàmiques equivalents.

Primer hem vist que, perquè un sistema presenti comportaments interessants és necessari que tingui influències d'interacció entre els seus graus de llibertat, és a dir, que es tanquin formant bucles de realimentació amb dependències no lineals que introdueixin efectes de competència.

Després ens hem interessat pels mecanismes que permeten anar complicant un sistema no lineal perquè pugui anar incorporant més i més graus de llibertat a la seva dinàmica efectiva. Hem mostrat com sistemes dinàmics de dimensió N poden aprofitar al màxim les seves possibilitat de realitzar $N - 1$ bifurcacions de Hopf sobre una parella sella-node de punts fixos. Hem vist que hi ha dos mecanismes bàsics de barreja no lineal, els quals poden barrejar tots aquests $N - 1$ modes d'oscillació donant lloc a evolucions temporals extraordinàriament complexes. Els senyals produïts presenten un cert grau d'autosimilitud a diverses escales temporals, fet que pot indicar una organització jeràrquica en l'actuació dels mecanismes no lineals que hi intervenen.

4. CONCLUSIONS

Finalment hem vist com aquests mecanismes bàsics de barreja es poden estendre a sistemes dinàmics N -dimensionals més generals mitjançant matrius arbitràries de punts fixos que formen un escenari dinàmic òptim. En particular, hem vist com aquest escenari de Landau generalitzat sembla estar involucrat amb el camí cap a la turbulència en fluids, i forma una base robusta única per sostenir complexitat¹.

¹Convidem al lector a consultar la discussió completa sobre les possibilitats dinàmiques de l'escenari de Landau generalitzat publicada a l'article *About the oscillatory possibilities of the dynamical systems* de R. Herrero, F. Pi, J. Rius, G. Orriols. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, volume 241, pages 1358, 2012 (20); ja que el present treball de grau n'ha omès certes parts, com per exemple l'emergència evolutiva, el cervell dinàmic i les implicacions filosòfiques de *l'entellat del món*.

Bibliografia

- [1] F. PI, M. FIGUERAS ATIENZA, J. RIUS I CASAS, AND G. ORRIOLS. **Què són els sistemes dinàmics?** *Revista de física*, pages 4–12, 1998. ii, 7
- [2] F. PI, M. FIGUERAS ATIENZA, J. RIUS I CASAS, AND G. ORRIOLS. **Què fan els sistemes dinàmics?** *Revista de física*, pages 12–27, 1998. ii, 7
- [3] FIGUERAS ATIENZA. *Camins cap a la complexitat en sistemes dinàmics de baixa dimensió*. Tesi Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, 2002. ii, 4
- [4] R. HERRERO, F. PI, J. RIUS, AND G. ORRIOLS. **About the oscillatory possibilities of the dynamical systems.** *Arxiv preprint arXiv:0911.2157*, 2009. ii, 48
- [5] EA JACKSON. *Perspective of nonlinear dynamics, vols. 1-2*. Cambridge UP, New York, NY (United States), 1989. 1, 36
- [6] F. CAPRA. *The science of Leonardo: inside the mind of the great genius of the Renaissance*. Doubleday Books, 2007. 2
- [7] I. STEWART. *¿ Juega Dios a los dados?: la nueva matemática del caos*. Barcelona : Crtica, 1991. 3
- [8] S.H. STROGATZ. *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Westview Pr, 1994. 3
- [9] J. GLEICK. *Chaos: Making a new science*. Vintage/Ebury (a Division of Random House Group), 1997. 3
- [10] G. FARMELO, I. ALEKSANDER, AND L.E. DE JUAN. *Fórmulas elegantes: Grandes ecuaciones de la ciencia moderna*. Tusquets Editores, 2004. 4
- [11] A. SCOTT. **Encyclopedia of nonlinear science.** *Recherche*, **67**:02, 2004. 4
- [12] A.T. WINFREE. *The geometry of biological time*, **12**. Springer Verlag, 1980. 4
- [13] G. ORRIOLS. **Local and Global Bifurcations in Opto-thermal Bistability with Localized Absorption.** In *Nonlinear dynamics and quantum phenomena in optical systems:*

BIBLIOGRAFIA

- proceedings of the third international workshop, Blanes (Girona, Catalunya), October 1-3, 1990*, **55**, page 190. Springer Verlag, 1991. 4
- [14] J.I. ROSELL, F. PI, F. BOIXADER, R. HERRERO, J. FARJAS, AND G. ORRIOLS. **Homoclinic bifurcations in thermo-optical bistability with localized absorption**. *Optics communications*, **82**(1-2):162–170, 1991. 4
- [15] FARJAS SILVA. *Inestabilitats dinàmiques en dispositius òptics passius excitats amb llum modulada*. Tesi Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, 1993. 4
- [16] JI ROSELL, J. FARJAS, R. HERRERO, F. PI, AND G. ORRIOLS. **Homoclinic phenomena in opto-thermal bistability with localized absorption**. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **85**(4):509–547, 1995. 4
- [17] R. HERRERO, R. PONS, J. FARJAS, F. PI, AND G. ORRIOLS. **Homoclinic dynamics in experimental Shil'nikov attractors**. *Physical Review E*, **53**(6):5627–5636, 1996. 4
- [18] J. RIUS, M. FIGUERAS, R. HERRERO, J. FARJAS, F. PI, AND G. ORRIOLS. **N-dimensional dynamical systems exploiting instabilities in full**. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **10**(4):760–770, 2000. 4, 42
- [19] J. RIUS, M. FIGUERAS, R. HERRERO, F. PI, J. FARJAS, AND G. ORRIOLS. **Full instability behavior of N-dimensional dynamical systems with a one-directional nonlinear vector field**. *Physical Review E*, **62**(1):333, 2000. 4, 42
- [20] R. HERRERO, F. PI, J. RIUS, AND G. ORRIOLS. **About the oscillatory possibilities of the dynamical systems**. *Physica D: Nonlinear Phenomena volume 241*, page 1358, 2012. 4, 5, 7, 48, 60
- [21] R. ABRAHAM AND C.D. SHAW. **Dynamics—The geometry of behavior**. *Dynamics—the geometry of behavior, by Abraham, Ralph.; Shaw, Christopher D. Santa Cruz, Calif.: Aerial Press,[1982]-[1988].*, **1,2,3**, 1982. 7
- [22] C. HUYGENS. **Horologium oscillatorium**. 1673. 10
- [23] O. BLAES. **A Universe of Disks**. *Scientific American*, **291**(4):68, 2004. 42
- [24] R.V. SOLÉ AND B.C. GOODWIN. *Signs of life: How complexity pervades biology*. Harper-Collins Publishers, 2002. 54
- [25] J.F. GIBSON, J. HALCROW, AND P. CVITANOVIĆ. **Visualizing the geometry of state space in plane Couette flow**. *Arxiv preprint arXiv:0705.3957*, 2007. 56, 57
- [26] J. HALCROW, J.F. GIBSON, P. CVITANOVIĆ, AND D. VISWANATH. **Heteroclinic connections in plane Couette flow**. *Arxiv preprint arXiv:0808.1865*, 2008. 56

- [27] P. CVITANOVIC, R.L. DAVIDCHACK, AND E. SIMINOS. **State space geometry of a spatio-temporally chaotic Kuramoto-Sivashinsky flow.** *SIAM J. Applied Dynam. Systems*, 2009. 56
- [28] J.F. GIBSON, J. HALCROW, AND P. CVITANOVIĆ. **Equilibrium and travelling-wave solutions of plane Couette flow.** *Journal of Fluid Mechanics*, **638**(1):243–266, 2009. 56
- [29] A.P. WILLIS, P. CVITANOVIC, AND M. AVILA. **Revealing the state space of turbulent pipe flow by symmetry reduction.** *Arxiv preprint arXiv:1203.3701*, 2012. 56
- [30] A. SCHMIEGEL. *Transition to turbulence in linearly stable shear flows.* PhD thesis, Universitätsbibliothek Marburg, 1999. 56