

Sphärische Erweiterung der Karlsruhe Metrik

Geometrische Visualisierung und Untersuchung

Sebastian Zins

29.09.2025

Fortgeschrittenen Praktikum
in der Arbeitsgruppe Visualisierung und Numerische Geometrie

Ruprecht-Karls Universität Heidelberg

1. Motivation



Zu mir:

- Sebastian Zins
- Bachelor in Informatik (100%)
- Betreuung von Dr. Susanne Krömker
- Bei Susanne bereits Bachelorarbeit und Seminar gemacht

Das Thema:

- 3-dimensionale Erweiterung der Karlsruhe Metrik
- Visualisierung durch Voronoi Diagramm
- Vergleich mit simplem Distanz Berechnung (euklidisch) unter verschiedenen Aspekten

2. Abstands Metriken



- Distanz gemessen entlang einer Geraden zwischen zwei Punkten im \mathbf{R}^n Raum
- Gerade kann im Raum ohne Beschränkungen gezogen werden
- Berechnet durch die \mathbf{L}^2 Norm

$$d_e(q, p) = \sqrt{\sum_{i=0}^n (q_i - p_i)^2}$$

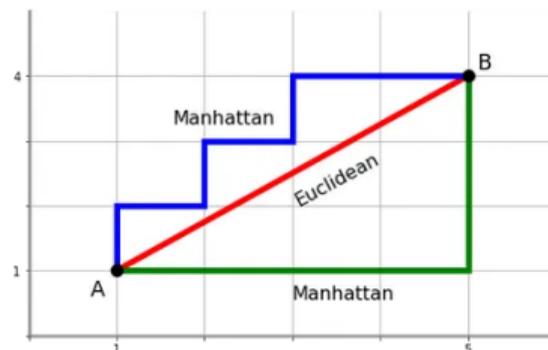


Figure 2.1: 2D Distanzberechnung nach Euklidischer und Manhattan Metrik¹

¹Rijk de Wet - <https://www.omnicalculator.com/math/manhattan-distance>

Abstands Metriken – Manhattan Metrik

- Distanz gemessen entlang entlang "Straßen von Häuserblocks"
- Name: Schachbrettartiges Straßenmuster ähnlich von Manhattan
- Distanzmetrik mit Einschränkung der Berechnung auf festgelegten Pfaden / Richtungen
- Distanz als Summe der Abstände der Einzelkoordinaten (\mathbf{L}^1 -Norm)

$$d_m(q, p) = \sum_{i=0}^n |q_i - p_i|$$

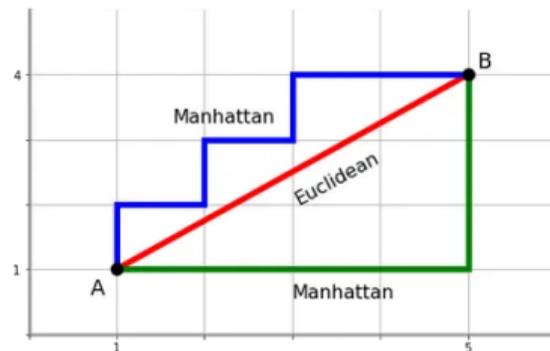


Figure 2.1: 2D Distanzberechnung nach Euklidischer und Manhattan Metrik¹

- In Manhattan Bewegung (vereinfacht) nur in Ost-West-Richtung
- In Karlsruhe stattdessen auf strahlenförmig vom Zentrum ausgehenden Straßen oder auf den ringförmigen Straßen rund um das Zentrum



Figure 2.2: Ansicht von Schloss und Stadt Karlsruhe²

²Christian Thran - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ansicht_von_Schloss_und_Stadt_Karlsruhe.jpg

Abstandsberechnung zwischen zwei Punkten auf zwei Arten

1. als Summe der Länge des kleinsten Kreisbogens zwischen den Punkten und der Länge der Strahlendifferenz beider Punkte zum Ursprung
2. Oder als Summe des Abstands von beiden Punkten zum Pol

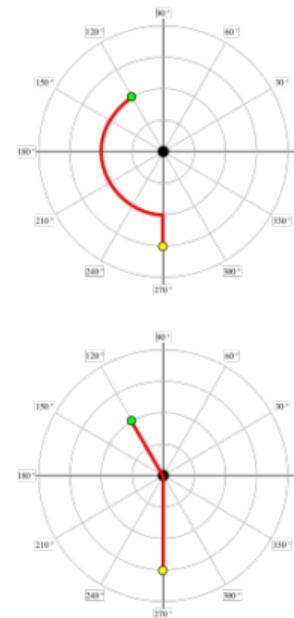


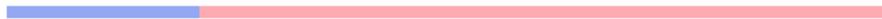
Figure 2.3: Distanz nach Karlsruhe Metrik

Für $p_i = (r_i, \varphi_i)$ mit $r_i \in \mathbf{R}$ und $\varphi_i \in [0, 2\pi]$ gilt

$$\delta(p_1, p_2) = \min(|\varphi_1 - \varphi_2|, 2\pi - |\varphi_1 - \varphi_2|) \quad // \text{ Bogenmaß}$$

$$d_k(p_1, p_2) = \begin{cases} \min(r_1, r_2) \cdot \delta(p_1, p_2) + |r_1 - r_2|, & \text{wenn } 0 \leq \delta(p_1, p_2) \leq 2 \\ r_1 + r_2, & \text{sonst} \end{cases}$$

3. 3D Erweiterung der Karlsruhe Metrik



Zwei mögliche Ansätze diese Metrik in die 3. Dimension zu übertragen:

1. Frei im Sphärischen Raum mit dem Ursprung als Mittelpunkt und die Strahlen vom Ursprung zu den Polen als Pole für die Berechnung der Abstände
2. Auf der Oberfläche einer Kugel (konstanter Radius für alle Punkte) mit dem Nord- und Südpol als zwei Pole der Metrik

3D Erweiterung der Karlsruhe Metrik – Auf Sphärenoberfläche

Idee: Nord- und Südhalbkugel jeweils analog zur 2D Metrik.
Geringster der folgenden Abständen:

- Addierter Bogenmaß beider Punkte **zum Nordpol** (entlang von Längengraden),
- Addierter Bogenmaß beider Punkte **zum Südpol** (entlang von Längengraden) und
- Bogenmaß zwischen beiden Punkten **entlang eines Längengrades** zusammen mit dem geringster Bogenmaß zwischen beiden Punkten **entlang eines Breitengrades**.

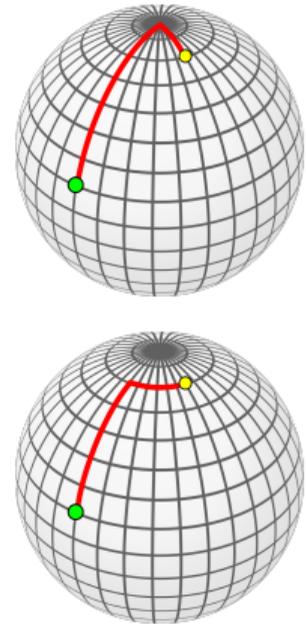


Figure 3.1: Distanz nach Karlsruhe Metrik in 3D

Sphärische Koordinaten

- Punkte definiert als $p_i = (r_i, \theta_i, \varphi_i)$
- φ ist **Nord-Süd Koordinate** mit $\varphi \in [0, 180^\circ]$ bzw. mit $\varphi \in [0, \pi]$
- θ ist **Ost-West Koordinate** mit $\theta \in [0, 360^\circ]$ bzw. mit $\theta \in [0, 2\pi]$
- r ist **Abstand vom Ursprung**.
Hier: Der Radius der Sphäre
- (y -Achse als Nord-Süd)

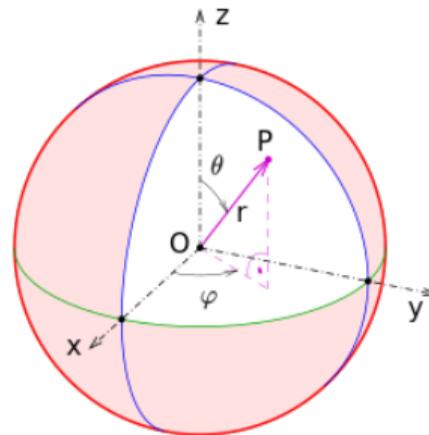


Figure 3.2: Sphärische Koordinaten ³

³Ag2gaeh - <https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Kugelkoord-def.svg>

- Ansatz: Distanz von beiden Punkten zum jeweiligen Pol jeweils entlang von Längenhälbkreisen
- Bogenmaßdistanz zwischen Punkten p und q über **Nordpol**: $d_{NP}(p_1, p_2) = R \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)$
- Bogenmaßdistanz über **Südpol**:
 $d_{SP}(p_1, p_2) = R \cdot (|\pi - \varphi_1| + |\pi - \varphi_2|)$

$$\begin{aligned}d_P(p_1, p_2) &= \min(d_{NP}(p_1, p_2), d_{SP}(p_1, p_2)) \\ &= R \cdot \min(\varphi_1 + \varphi_2, |\pi - \varphi_1| + |\pi - \varphi_2|)\end{aligned}$$

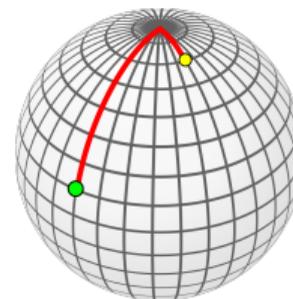


Figure 3.3: Min. Distanz über die Pole nach Karlsruhe Metrik

- **Breitengraddistanz:** $\delta_\varphi(p_1, p_2) = |\varphi_1 - \varphi_2|$
- Bogenmaß der geringsten **Breitengraddistanz:**
 $d_{bG}(p_1, p_2) = R \cdot \min(\sin(\varphi_1), \sin(\varphi_2)) \cdot \delta_\varphi(p_1, p_2)$
- **Längengraddistanz:**
 $\delta_\theta(p_1, p_2) = |\min(|\theta_1 - \theta_2|, 2\pi - |\theta_1 - \theta_2|)|$
- Bogenmaß der **Längengraddistanz:**
 $d_{lG}(p_1, p_2) = R \cdot \delta_\theta(p_1, p_2)$

$$\begin{aligned}d_{bGlG}(p_1, p_2) &= d_{lG}(p_1, p_2) + d_{bG}(p_1, p_2) \\ &= R \cdot (\min(\sin(\varphi_1), \sin(\varphi_2)) \cdot \delta_\theta(p_1, p_2) + \delta_\varphi(p_1, p_2))\end{aligned}$$

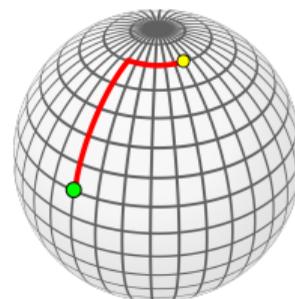


Figure 3.4: Min. Distanz entlang von Längen- und Breitenkreisen nach Karlsruhe Metrik

Wenn Breitengraddistanz kleiner oder gleich 2 ist wird die Distanz entlang der Längen- und Breitenkreisen verwendet, ansonsten die Distanz über die Pole

$$\delta_{\varphi}(p_1, p_2) = |\varphi_1 - \varphi_2|$$

$$\delta_{\theta}(p_1, p_2) = |\min(|\theta_1 - \theta_2|, 2\pi - |\theta_1 - \theta_2|)|$$

$$d(p_1, p_2) = R \cdot \begin{cases} \min(\sin(\varphi_1), \sin(\varphi_2)) \cdot \delta_{\theta}(p_1, p_2) + \delta_{\varphi}(p_1, p_2) & \text{wenn } \delta_{\varphi}(p_1, p_2) \leq 2 \\ \min(\varphi_1 + \varphi_2, |\pi - \varphi_1| + |\pi - \varphi_2|) & \text{sonst} \end{cases}$$

- Erweiterung der Euklidischen Distanz Berechnung für die Oberfläche einer Sphäre
- Länge des kürzeren Abschnittes eines Großkreises zwischen zwei Punkten

Für $p_i = (R, \theta_i, \varphi_i)$ gilt:

$$\Delta X = \cos(\varphi_2) \cos(\theta_2) - \cos(\varphi_1) \cos(\theta_1)$$

$$\Delta Y = \cos(\varphi_2) \sin(\theta_2) - \cos(\varphi_1) \sin(\theta_1)$$

$$\Delta Z = \sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)$$

$$d_{GG} = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2 + (\Delta Z)^2}$$

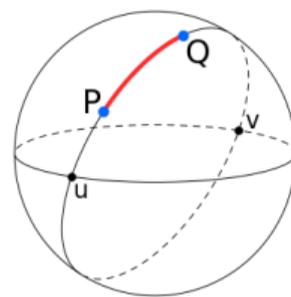


Figure 3.5: Großkreis-Distanz ⁴

⁴CheCheDaWaff -

https://en.wikipedia.org/wiki/File:Illustration_of_great-circle_distance.svg

4. Voronoi Diagramm



- Zerlegung eines Raumes in **Zellen** anhand einer vorgegebenen Menge an Punkten (**Zentren**)
- Der Abstand jedes Punktes innerhalb einer Zelle hat zu dem Zentrum der Zelle einen **geringeren Abstand** als zu allen anderen Zentren
- Punkte auf der Grenze zwischen Zellen haben **exakt den gleichen Abstand** zu den Zentren beider Zellen

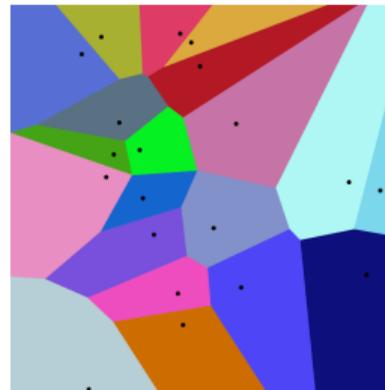
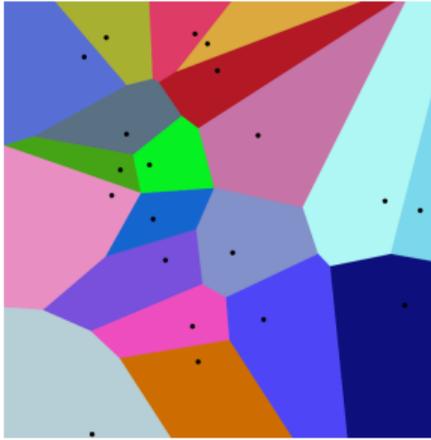


Figure 4.1: Voronoi Diagramm nach Euklidischer Metrik⁵

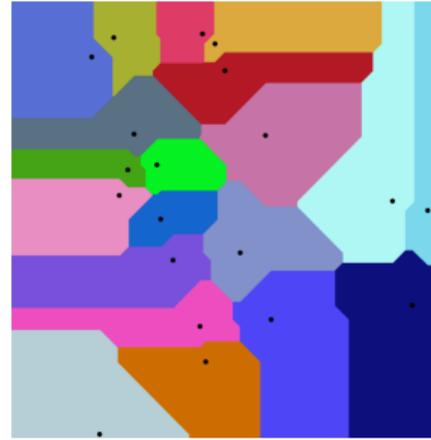
⁵Balu Ertl - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euclidean_Voronoi_diagram.svg

Voronoi Diagramm

Eignet sich sehr gut um verschiedene Abstandsmetriken visuell zu vergleichen



(a) Voronoi Diagramm nach Euklidischer Metrik⁵



(b) Voronoi Diagramm nach Manhattan Metrik⁶

Figure 4.2: Voronoi Diagramme nach verschiedenen Metriken mit gleicher Punktemenge

⁶Balu Ertl - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Manhattan_Voronoi_Diagram.svg

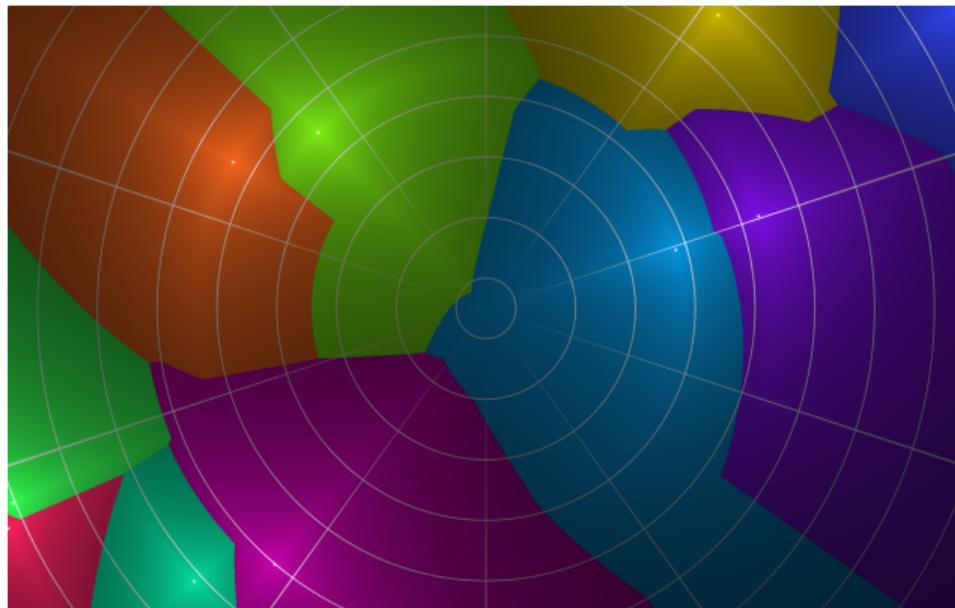


Figure 4.3: Voronoi Diagramm nach Karlsruhe Metrik⁷

⁷Gijs Bellaard - <https://www.shadertoy.com/view/XlGXrt> (Screenshot)

5. Voronoi Diagramm mit Karlsruhe Metrik 3D



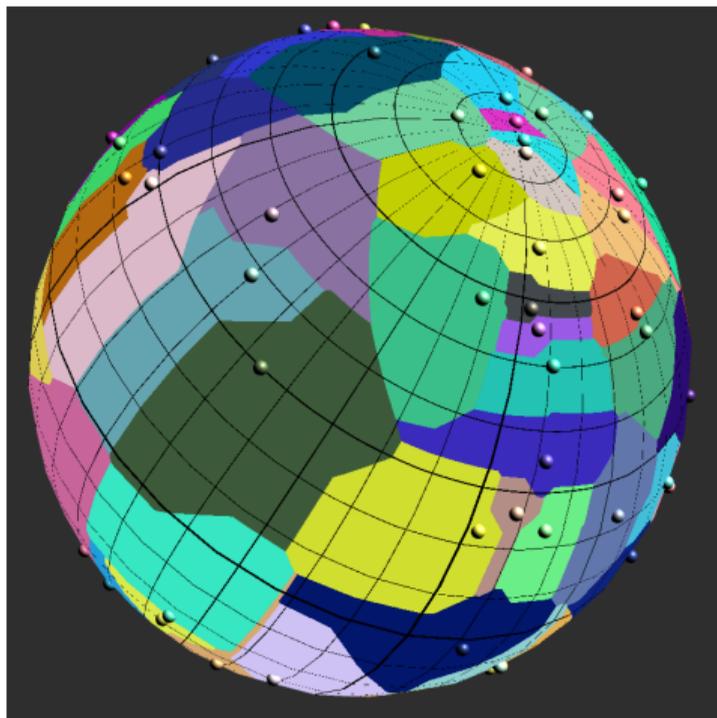


Figure 5.1: Voronoi Diagramm nach Karlsruhe Metrik auf einer Sphäre

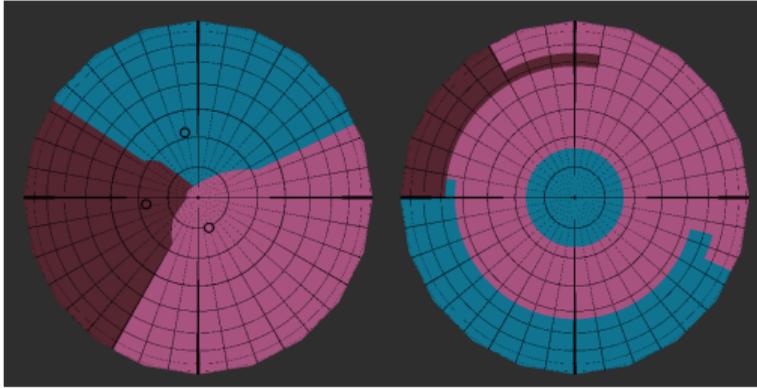


Figure 5.2: Voronoi Diagramm nach Karlsruhe Metrik auf einer Sphäre

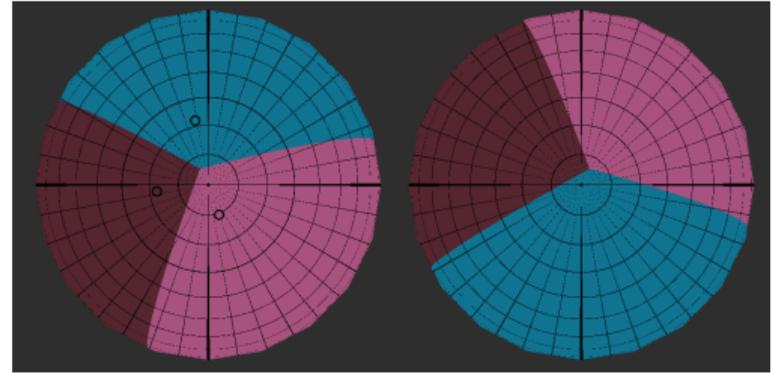


Figure 5.3: Voronoi Diagramm nach Euklidischer Metrik auf einer Sphäre

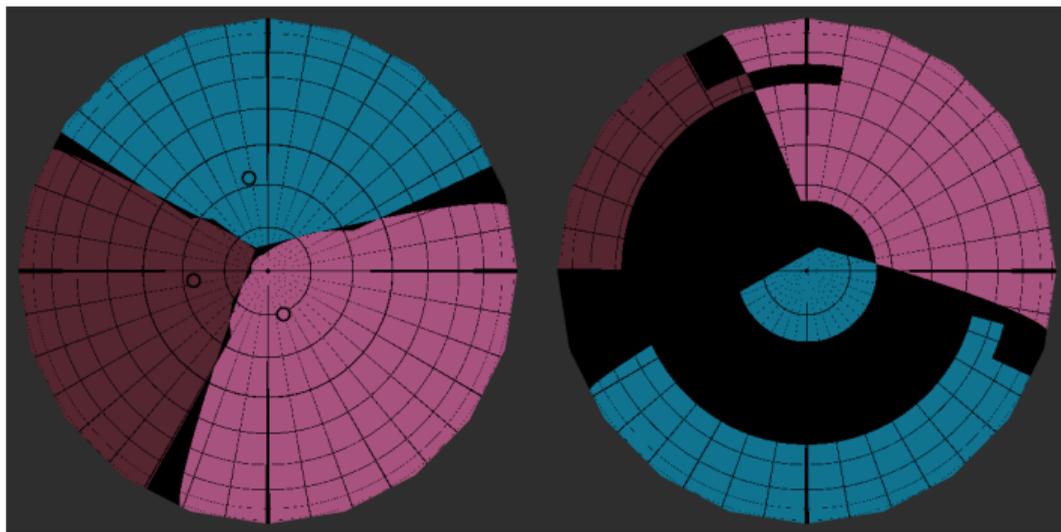


Figure 5.4: Überschneidung von Voronoi Diagrammen nach geodätischer und Karlsruhe Metrik

=> Geringe Diskrepanz in Punktnähe

=> Große Diskrepanz am gegenüberliegenden Pol, durch konditionalen Funktionsteil

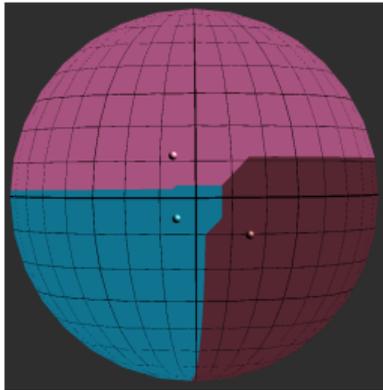


Figure 5.5: Voronoi Diagramm nach Karlsruhe Metrik auf einer Sphäre

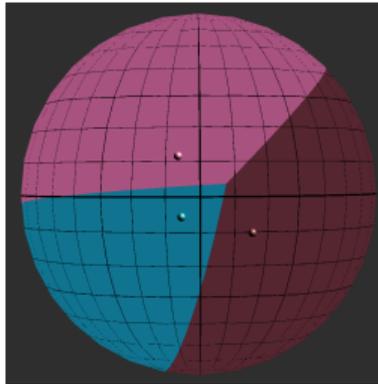


Figure 5.6: Voronoi Diagramm nach geodätischer Metrik auf einer Sphäre

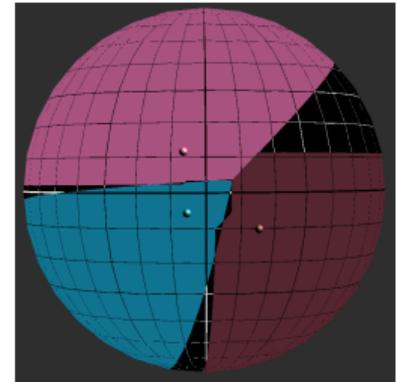


Figure 5.7: Überschneidung von Voronoi Diagrammen nach geodätischer und Karlsruhe Metrik

=> Geringe Diskrepanz in Äquatornähe, zunehmende Diskrepanz mit Äquatorabstand

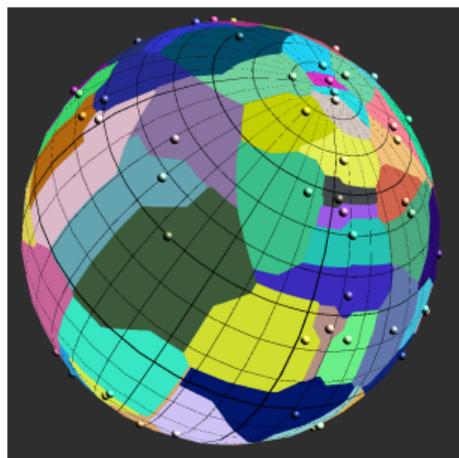


Figure 5.8: Voronoi Diagramm nach Karlsruhe Metrik auf einer Sphäre

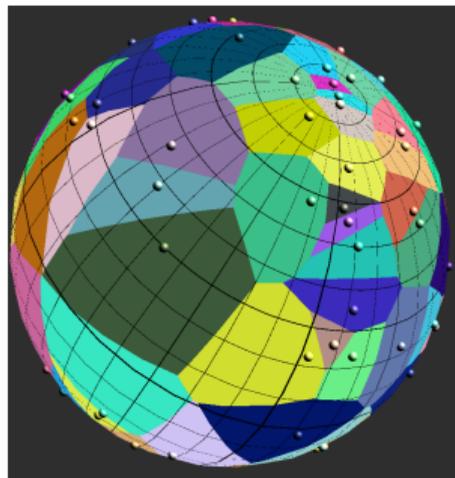


Figure 5.9: Voronoi Diagramm nach geodätischer Metrik auf einer Sphäre

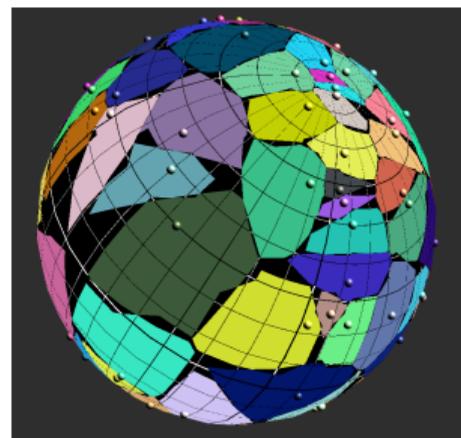


Figure 5.10: Überschneidung von Voronoi Diagrammen nach geodätischer und Karlsruhe Metrik

- Voronoi Diagramme verwenden meist den **Nearest-Distance Ansatz**
- Der Referenzpunkt einer Zelle ist immer in ihr enthalten.
- Stattdessen kann auch der **Furthest-Distance Ansatz** verwendet werden
- Der Referenzpunkt hat den größten Abstand zu allen Punkten innerhalb einer Zelle
- Muss nicht unbedingt innerhalb der Zelle sein

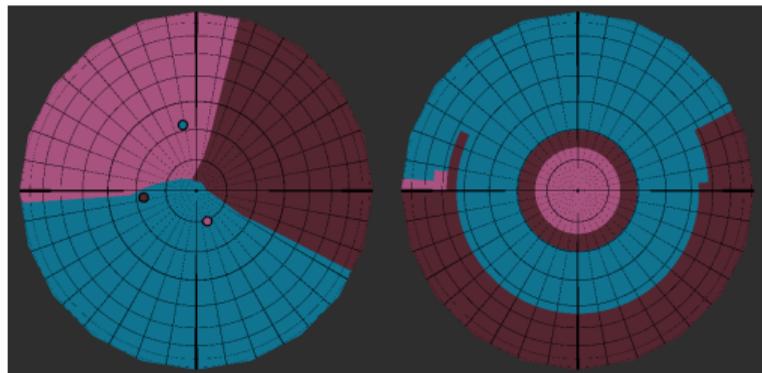


Figure 5.11: Karlsruhe Metrik

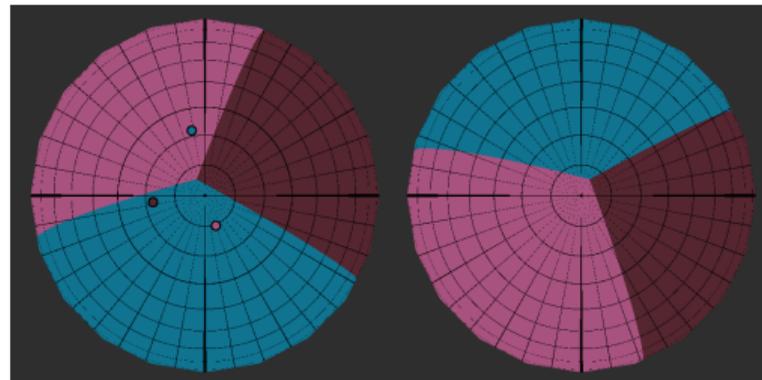


Figure 5.12: Geodätische Metrik

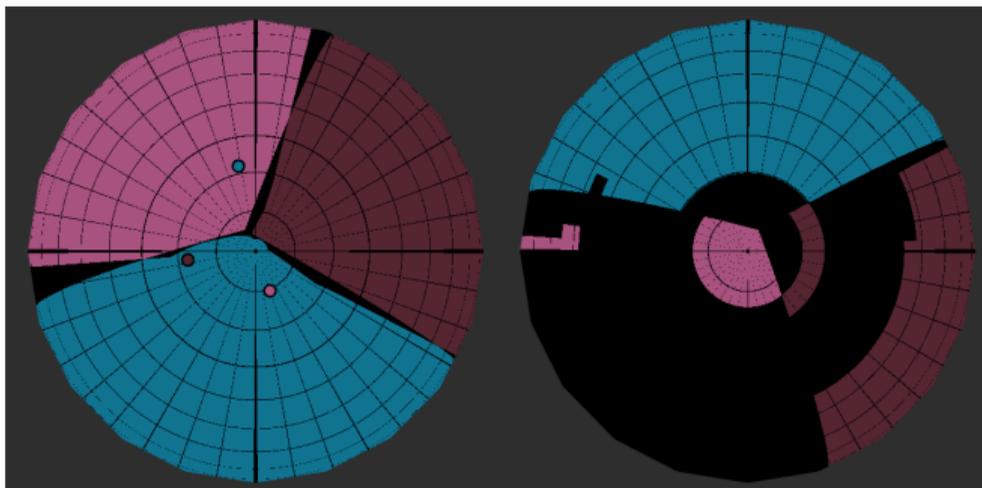


Figure 5.13: Überschneidung von Geodätischer und Karlsruhe Metrik

=> Geringe Diskrepanz in Punktnähe

=> Enorme Diskrepanz am gegenüberliegenden Pol

=> Effekt des Konditionalen Funktionsteils verstärkt

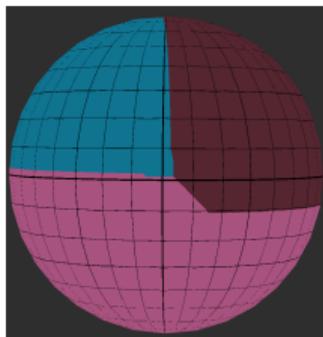
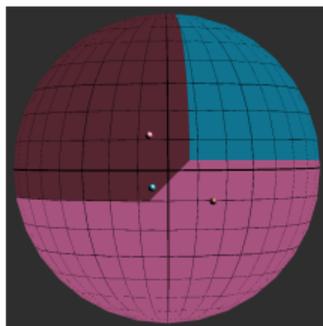


Figure 5.14: Karlsruhe Metrik

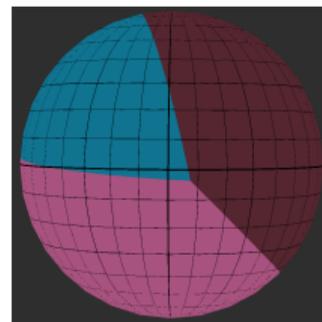
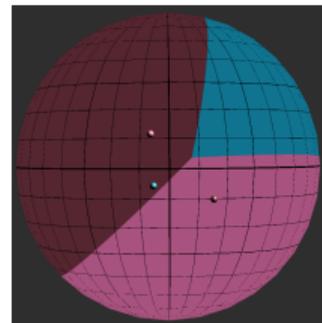
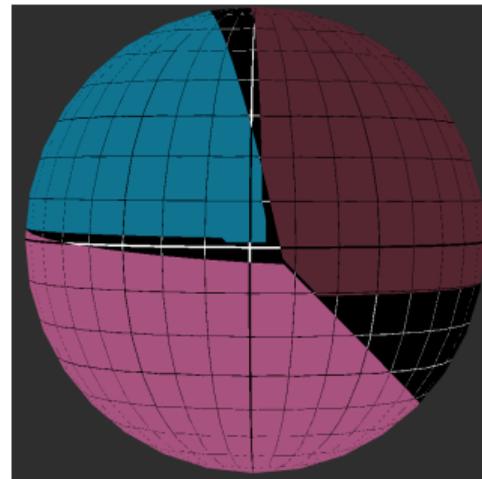
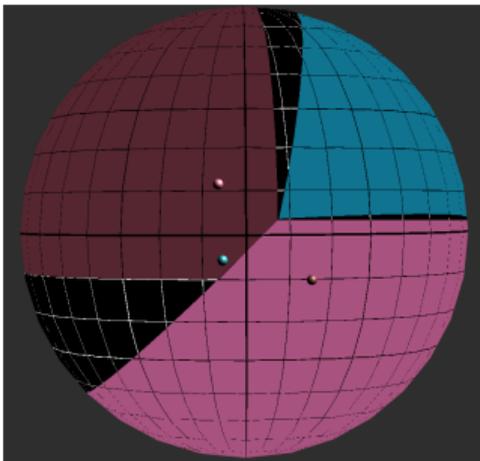


Figure 5.15: Geodätische Metrik



=> Geringe Diskrepanz in Äquaturnähe

=> zunehmende Diskrepanz in Polnähe (kaum Übereinstimmung)

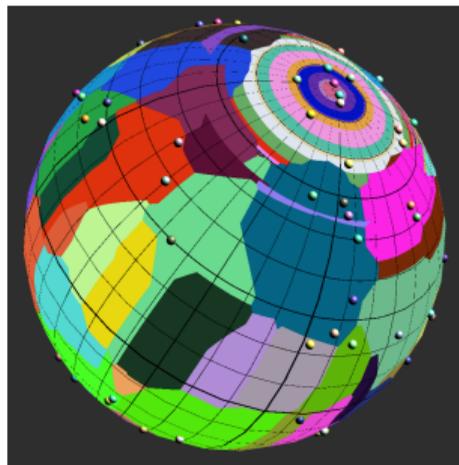


Figure 5.16: Karlsruhe Metrik

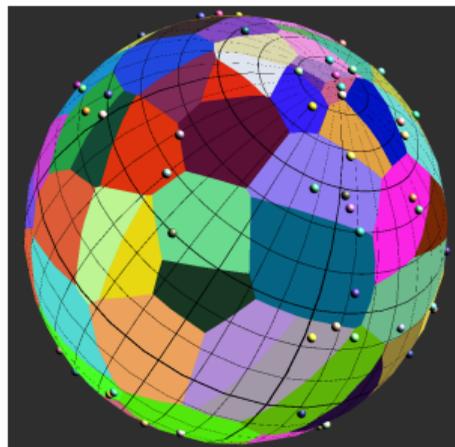


Figure 5.17: Geodätische Metrik

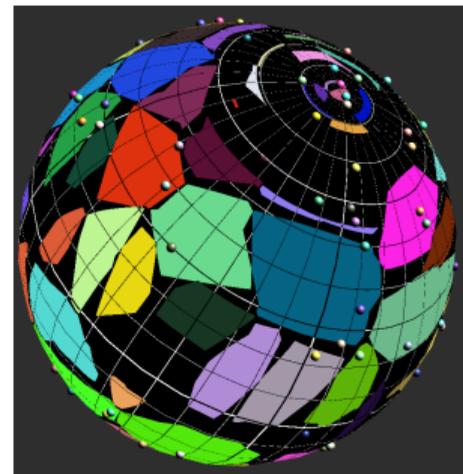


Figure 5.18: Überschneidung von Geodätischer und Karlsruhe Metrik

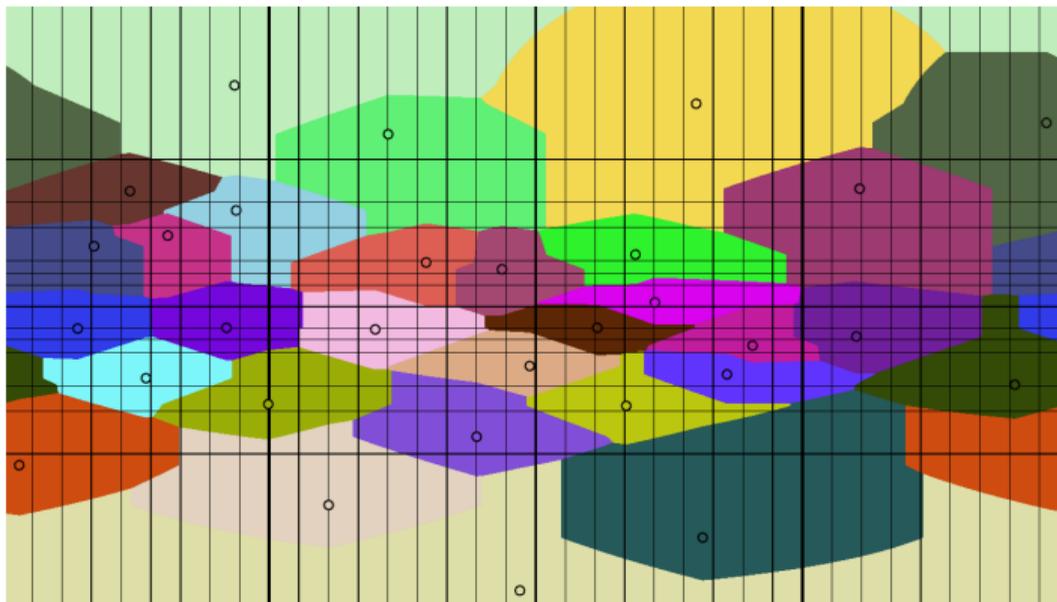


Figure 5.19: Mercator Projektion eines Voronoi Diagramms nach der 3D Karlsruhe Metrik

Ähnlichkeit zur 2D Mercator Metrik mit einer Azimuthal Projektion

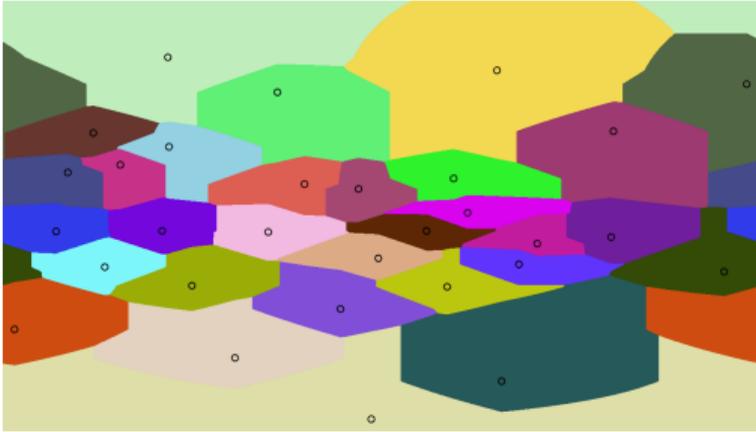


Figure 5.20: Mercator Projektion eines Voronoi Diagramms nach der 3D Karlsruhe Metrik



Figure 5.21: 2D Vornoi Diagramm nach Manhattan Metrik⁶

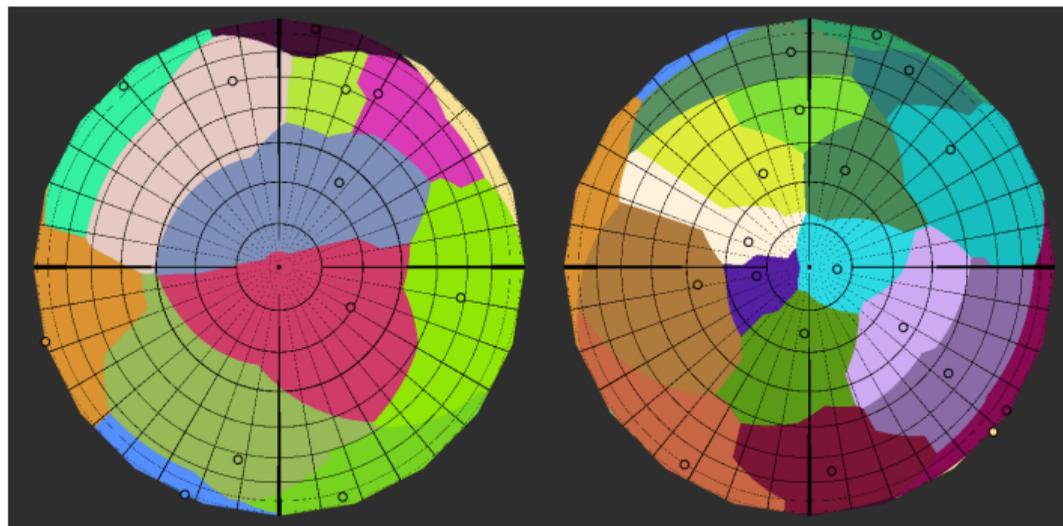


Figure 5.22: Azimuthal Projektion eines Voronoi Diagramms nach der 3D Karlsruhe Metrik

Ähnlichkeit zur 2D Karlsruhe Metrik mit einer Azimuthal Projektion

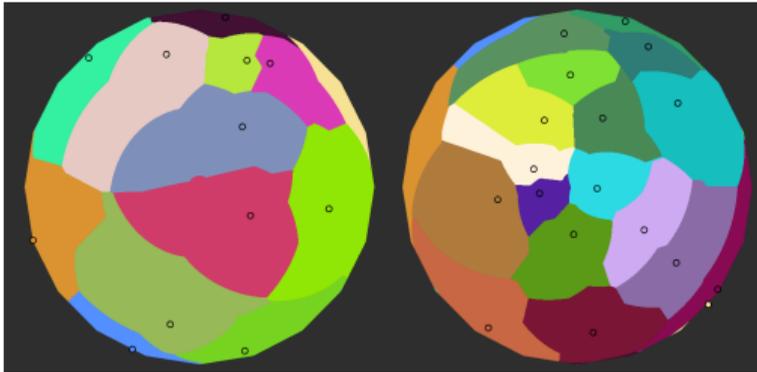


Figure 5.23: Azimuthal Projektion eines Voronoi Diagramms nach der 3D Karlsruhe Metrik

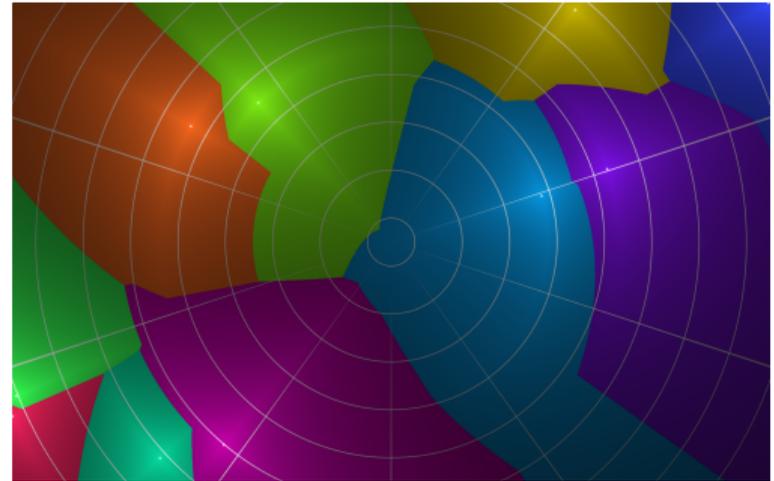


Figure 5.24: 2D Vornoi Diagramm nach Karlsruhe Metrik⁷